193

# MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG
VON

K. KNOPP
KÖNIGSBERG

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN
VON

L. LICHTENSTEIN
LEIPZIG

---

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

15. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1922

5956-42

# MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
KÖNIGSBERG

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
LEIPZIG

---

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

15. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1922

66 53136
QA1
M88
V. 15-1

# Inhaltsverzeichnis.

Seite

Baldus, R., Über die Flächen, welche ein Strahlenbündel isogonal schneiden . 147
Beck, H., Der Fundamentalsatz der Lieschen Kugelgeometrie im Euklidischen Raum 159
Blaschke, W., Differentialgeometrie der geradlinigen Flächen im elliptischen Raum . . . . . 309
Carleman, T., Über die Abelsche Integralgleichung mit konstanten Integrationsgrenzen . . . . . 111
Courant, R., Über die Schwingungen eingespannter Platten . . . . . 195
Cramér, H., Über zwei Sätze des Herrn G. H. Hardy . . . . . 201
Hilb, E., Die komplexen Nullstellen der Besselschen Funktionen . . . . . 274
Hilb, E., Zur Theorie der linearen Differenzengleichungen . . . . . 280
Kamke, E., Bemerkung zum allgemeinen Waringschen Problem . . . . . 188
Knopp, K., Über das Eulersche Summierungsverfahren . . . . . 226
König, R., Die Elementartheoreme bei den Riemannschen Transzendenten . . 26
Lecat, M., Sur les déterminants cayléens et bicayléens anormaux . . . . . 291
Lindeberg, J. W., Eine neue Herleitung des Exponentialgesetzes in der Wahrscheinlichkeitsrechnung . . . . . 211
Loewy, A., Über die Reduktion algebraischer Gleichungen durch Adjunktion insbesondere reeller Radikale . . . . . 261
Moore, R. L., Concerning Continuous Curves in the Plane . . . . . 254
Müntz, Ch. H., Die Ähnlichkeitsbewegungen beim allgemeinen $n$-Körperproblem 169
Neder, L., Über Gebiete gleichmäßiger Konvergenz Dirichletscher Reihen . . . 286
Ostrowski, A. und I. Schur, Über eine fundamentale Eigenschaft der Invarianten einer allgemeinen binären Form . . . . . 81
Perron, O., Über die Gestalt der Integralkurven einer Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung eines singulären Punktes . . . . . 121
Schouten, J. A., Nachtrag zur Arbeit über die verschiedenen Arten der Übertragung, M. Z. 13 (1922), S. 56—81 . . . . . 168
Schur, I. und A. Ostrowski, Über eine fundamentale Eigenschaft der Invarianten einer allgemeinen binären Form . . . . . 81
Stenzel, H., Über die Darstellbarkeit einer Matrix als Produkt von zwei symmetrischen Matrizen, als Produkt von zwei alternierenden Matrizen und als Produkt von einer symmetrischen und einer alternierenden Matrix . . 1
Tauber, A., Über die Umwandlung von Potenzreihen in Kettenbrüche . . . . 66
Zindler, K., Über einen Hauptsatz in der Theorie der konvexen Polyeder . . 106

# Über die Darstellbarkeit einer Matrix als Produkt von zwei symmetrischen Matrizen, als Produkt von zwei alternierenden Matrizen und als Produkt von einer symmetrischen und einer alternierenden Matrix.

Von

H. Stenzel in Göttingen.

---

**Inhalt:**

Seite

Einleitung . . . . . 1

§ 1. Über die allgemeinste Matrix $X$, welche der Gleichung $CX = XC'$ genügt . . . . . 2

§ 2. Über das Verschwinden der Determinante der Matrix $S$ bzw. $T$, welche der Gleichung $CS = SC'$ bzw. $CT = TC'$ genügt . . . . . 8

§ 3. Über die Elementarteiler der Matrix

$$\begin{pmatrix} A - \lambda E & B \\ 0 & -\lambda E \end{pmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 11$$

§ 4. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Darstellbarkeit einer Matrix als Produkt zweier symmetrischer und als Produkt zweier alternierender Matrizen . . . . . 20

§ 5. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Darstellbarkeit einer Matrix als Produkt einer alternierenden und einer symmetrischen Matrix . . 23

## Einleitung.

Wir behandeln in § 1 die Aufgabe, die allgemeinste Matrix $X$ zu bestimmen, welche der Gleichung $CX = XC'$ genügt, wo $C$ eine gegebene quadratische $n$-reihige Matrix bedeutet. Diese Aufgabe ist gleichbedeutend

mit der spezielleren, die allgemeinste symmetrische Matrix $S$[1]) und die allgemeinste alternierende Matrix $T$ zu finden, welche $CS = SC'$ bzw. $CT = TC'$ genügt. Dies benutzt Frobenius[2]), um die Anzahl der linear unabhängigen Matrizen $X$, welche $CX = XC'$ genügen, anzugeben.

Wir werden die allgemeinste Matrix $S$ bzw. $T$, welche die obigen Gleichungen erfüllt, explizit angeben und daraus in § 2 erkennen, welchen Bedingungen $C$ genügen muß, damit $|S|$ bzw. $|T|$ von Null verschieden ist. Daraus ergeben sich unmittelbar die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, wann sich $C$ als Produkt zweier symmetrischer bzw. alternierender Matrizen darstellen läßt, *deren eine eine von Null verschiedene Determinante besitzt.*

Um uns von dieser Einschränkung freizumachen, werden in § 3 zwei allgemeine Sätze über die Elementarteiler einer Matrix der Form $\begin{pmatrix} A-\lambda E & B \\ 0 & -\lambda E \end{pmatrix}$ abgeleitet. Mit deren Hilfe gelingt es dann leicht, die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Darstellbarkeit einer Matrix als Produkt zweier alternierender Matrizen (§ 4) und für die Darstellbarkeit einer Matrix als Produkt einer symmetrischen und einer alternierenden Matrix (§ 5) abzuleiten.

## § 1.

## Über die allgemeinste Matrix $X$, welche der Gleichung $CX = XC'$ genügt.

Gegeben sei eine beliebige $n$-reihige quadratische Matrix $C$. Gesucht ist die allgemeinste Matrix $X$, welche der Gleichung genügt:

$$CX = XC'. \tag{1}$$

Ist $C$ ähnlich zu einer Matrix $N$, d. h. $PCP^{-1} = N$, so folgt aus (1):

$$NPXP' = PXP'N';$$

oder wenn man

$$PXP' = Y \tag{2}$$

setzt, folgt

$$NY = YN'. \tag{3}$$

---

[1]) Mit den Buchstaben $S$, $\mathfrak{S}$, $\Sigma$ werden im folgenden stets symmetrische, mit $T$, $\mathfrak{T}$, $\mathsf{T}$, $\Theta$ stets alternierende Matrizen bezeichnet.

[2]) Über die mit einer Matrix vertauschbaren Matrizen. Sitzungsberichte der Berliner Akademie, 1910 I, S. 12.

$Y$ läßt sich in der Form $Y = S + T$ schreiben. Dann folgt aus (3):

$$NS = SN', \tag{4}$$

$$NT = TN'. \tag{5}$$

Es seien jetzt $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ die *verschiedenen* Wurzeln der Gleichung $|C - \lambda E| = 0$, dann wähle ich $N$ als Normalform (vgl. Bôcher, Einführung in die höhere Algebra, S. 311) und denke mir $N$ in die Teilmatrizen $N_1, N_2, \ldots, N_\nu$ zerspalten, so daß $N_\varkappa - \lambda E$ nur Elementarteiler zur Basis $\lambda - \alpha_\varkappa$ besitzt, d. h.

$$N = \begin{pmatrix} N_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & N_2 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & . & \ldots & N_\nu \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Setzt man entsprechend:

$$Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \ldots & Y_{1\nu} \\ Y_{21} & Y_{22} & \ldots & Y_{2\nu} \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ Y_{\nu 1} & Y_{\nu 2} & \ldots & Y_{\nu\nu} \end{pmatrix},$$

so folgt aus (3):

$$N_\varkappa Y_{\varkappa\mu} = Y_{\varkappa\mu} N'_\mu \qquad (\varkappa, \mu = 1, 2, \ldots, \nu). \tag{7}$$

Wenn $|N_\varkappa - \lambda E|$ und $|N'_\mu - \lambda E|$ keinen Faktor gemeinsam haben, d. h. wenn $\varkappa \neq \mu$ ist, so folgt nach dem Satz XI in § 7 einer Arbeit von Frobenius[3]) aus (7):

$$Y_{\varkappa\mu} = 0 \qquad (\varkappa \neq \mu).$$

Bei Frobenius wird dieser Satz nur für quadratische Matrizen bewiesen, während hier die $Y_{\varkappa\mu}$ im allgemeinen rechteckige Matrizen sind. Doch bleibt der Satz auch für rechteckige Matrizen richtig, da man die Gleichung (7) leicht in einer Form schreiben kann, daß in ihr nur quadratische Matrizen auftreten. Sei etwa $N_\varkappa$ $n$-reihig und $N'_\mu$ $m$-reihig $(n > m)$, d. h. $Y_{\varkappa\mu}$ hat $n$ Zeilen und $m$ Kolonnen, so ist Gleichung (7) identisch mit der folgenden, indem $Y_{\varkappa\mu}$ und $N'_\mu$ passend ergänzt sind:

[3]) Frobenius, Über lineare Substitutionen und bilineare Formen, Journal f. d. r. u. a. Mathematik 84, S. 28.

$$\begin{array}{|c|} \hline \\ N_\varkappa \\ \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline \begin{matrix} 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ 0 \dots 0 \end{matrix} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \\ Y_{\varkappa\mu} \\ \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \begin{matrix} 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ 0 \dots 0 \end{matrix} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline \\ Y_{\varkappa\mu} \\ \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline \begin{matrix} \alpha_\mu & 0 & \dots \\ 0 & \alpha_\mu & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots \end{matrix} \\ \hline \end{array}$$

Für $m > n$ hat man entsprechend die *Zeilen* von $Y_{\varkappa\mu}$ zu ergänzen. Man muß jetzt noch $Y_{\varkappa\varkappa}$ aus der Gleichung

$$N_\varkappa Y_{\varkappa\varkappa} = Y_{\varkappa\varkappa} N'_\varkappa \tag{8}$$

bestimmen. $N_\varkappa$ enthält nur Elementarteiler zur Basis $\lambda - \alpha_\varkappa$. Ich kann also setzen:

$$N_\varkappa = \begin{pmatrix} \alpha_\varkappa & 1 & 0 & \dots & . & 0 \\ 0 & \alpha_\varkappa & 1 & \dots & . & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & . & . & \dots & \alpha_\varkappa & 1 \\ 0 & . & . & \dots & . & \alpha_\varkappa \end{pmatrix}.$$

Enthält $N_\varkappa$ *mehrere* Elementarteiler zur Basis $\lambda - \alpha_\varkappa$, so hat man mehrere der Einsen in der Diagonalparallelen durch Nullen zu ersetzen.

Ist $E$ die Einheitsmatrix und $E_*$ eine Matrix, welche überall Nullen außer in der ersten Diagonalparallelen enthält, so ist

$$N_\varkappa = \alpha_\varkappa E + E_*$$

und (8) geht über in

$$(\alpha_\varkappa E + E_*) Y_{\varkappa\varkappa} = Y_{\varkappa\varkappa} (\alpha_\varkappa E + E'_*).$$

Daraus folgt

$$E_* Y_{\varkappa\varkappa} = Y_{\varkappa\varkappa} E'_*, \tag{9}$$

und jede Lösung von (9) ist auch Lösung von (8).

Ich setze nun

$$Y_{\varkappa\varkappa} = \Sigma_{\varkappa\varkappa} + \Theta_{\varkappa\varkappa}, \tag{10}$$

wo $\Sigma_{\varkappa\varkappa}$ eine symmetrische, $\Theta_{\varkappa\varkappa}$ eine alternierende Matrix bedeutet; dann ist

$$S = \begin{pmatrix} \Sigma_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Sigma_{22} & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ 0 & . & \dots & \Sigma_{\nu\nu} \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} \Theta_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Theta_{22} & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ 0 & . & \dots & \Theta_{\nu\nu} \end{pmatrix},$$

und aus (9) folgt

$$E_* \Sigma_{\varkappa\varkappa} = \Sigma_{\varkappa\varkappa} E'_* , \tag{11}$$

$$E_* \Theta_{\varkappa\varkappa} = \Theta_{\varkappa\varkappa} E'_* . \tag{12}$$

Die Elementarteiler von $E_* - \lambda E$ seien der Größe nach geordnet:

$$\lambda^{n_1},\ \lambda^{n_2},\ \ldots,\ \lambda^{n_m} \qquad (n_1 \geqq n_2 \geqq \ldots \geqq n_m).$$

Die $n_1$-reihige Matrix

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . \\ 0 & . & . & \ldots & 1 \\ 0 & . & . & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

hat dann den Elementarteiler $\lambda^{n_1}$. Setze ich die analoge $n_2$-reihige Matrix gleich $E_2$ usw., so ist

$$E_* = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & E_2 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & . & \ldots & E_m \end{pmatrix}.$$

Ich setze entsprechend

$$\Sigma_{\varkappa\varkappa} = \begin{pmatrix} S_{n_1 n_1} & S_{n_1 n_2} & \ldots & S_{n_1 n_m} \\ S_{n_2 n_1} & S_{n_2 n_2} & \ldots & S_{n_2 n_m} \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ S_{n_m n_1} & S_{n_m n_2} & \ldots & S_{n_m n_m} \end{pmatrix}$$

und

$$\Theta_{\varkappa\varkappa} = \begin{pmatrix} T_{n_1 n_1} & T_{n_1 n_2} & \ldots & T_{n_1 n_m} \\ T_{n_2 n_1} & T_{n_2 n_2} & \ldots & T_{n_2 n_m} \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ T_{n_m n_1} & T_{n_m n_2} & \ldots & T_{n_m n_m} \end{pmatrix},$$

wo $S_{n_\alpha n_\beta}$ und $T_{n_\alpha n_\beta}$ $n_\alpha$ Zeilen und $n_\beta$ Spalten besitzen und der Bedingung genügen:

$$S_{n_\alpha n_\beta} = S'_{n_\beta n_\alpha}, \tag{12a}$$

$$T_{n_\alpha n_\beta} = - T'_{n_\beta n_\alpha}. \tag{12b}$$

Jetzt folgt aus (11) bzw. (12)

$$E_\alpha S_{n_\alpha n_\beta} = (E_\beta S_{n_\beta n_\alpha})', \tag{13}$$

$$E_\alpha T_{n_\alpha n_\beta} = -(E_\beta T_{n_\beta n_\alpha})'. \tag{14}$$

Setzt man ferner

$$S_{n_\alpha n_\beta} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1\,n_\beta} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2\,n_\beta} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ s_{n_\alpha 1} & s_{n_\alpha 2} & \dots & s_{n_\alpha n_\beta} \end{pmatrix} \qquad (s_{\varkappa\lambda} = s_{\lambda\varkappa})$$

und

$$T_{n_\alpha n_\beta} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1\,n_\beta} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2\,n_\beta} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ t_{n_\alpha 1} & t_{n_\alpha 2} & \dots & t_{n_\alpha n_\beta} \end{pmatrix} \qquad (t_{\varkappa\lambda} = -t_{\lambda\varkappa}),$$

so folgt, daß die allgemeinste Matrix $S_{n_\alpha n_\beta}$ bzw. $T_{n_\alpha n_\beta}$, welche (13) bzw. (14) genügt, folgende Gestalt hat:

$$S_{n_\alpha n_\beta} = \left.\begin{pmatrix} s_1^{n_\alpha n_\beta} & s_2^{n_\alpha n_\beta} & \dots & . & . & s_{n_\beta}^{n_\alpha n_\beta} \\ s_2^{n_\alpha n_\beta} & s_3^{n_\alpha n_\beta} & \dots & . & s_{n_\beta}^{n_\alpha n_\beta} & 0 \\ s_3^{n_\alpha n_\beta} & . & \dots & s_{n_\beta}^{n_\alpha n_\beta} & 0 & 0 \\ . & . & \dots & . & . & . \\ . & . & \dots & . & . & . \\ s_{n_\beta}^{n_\alpha n_\beta} & 0 & \dots & . & . & 0 \\ 0 & 0 & \dots & . & . & 0 \\ . & . & \dots & . & . & . \\ . & . & \dots & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & . & . & 0 \end{pmatrix}\right\} \begin{matrix} (n_\alpha \geqq n_\beta), \\ \\ \\

$$(16)\quad T_{n_\alpha n_\beta} = \left.\begin{pmatrix} t_1^{n_\alpha n_\beta} & t_2^{n_\alpha n_\beta} & \dots & . & . & t_{n_\beta}^{n_\alpha n_\beta} \\ t_2^{n_\alpha n_\beta} & t_3^{n_\alpha n_\beta} & \dots & . & t_{n_\beta}^{n_\alpha n_\beta} & 0 \\ t_3^{n_\alpha n_\beta} & . & \dots & t_{n_\beta}^{n_\alpha n_\beta} & 0 & 0 \\ . & . & \dots & . & . & . \\ . & . & \dots & . & . & . \\ t_{n_\beta}^{n_\alpha n_\beta} & 0 & \dots & . & . & 0 \end{pmatrix}\right\} (n_\alpha > n_\beta).$$

$$\left.\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & . & . & 0 \\ . & . & \dots & . & . & . \\ . & . & \dots & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & . & . & 0 \end{pmatrix}\right\} (n_\alpha - n_\beta)\text{Zeilen}.$$

$$(17)\quad T_{n_\alpha n_\alpha} = 0.$$

$S_{n_\alpha n_\beta}$ bzw. $T_{n_\alpha n_\beta}$ für $n_\alpha < n_\beta$ folgt aus (12a) bzw. (12b). Fassen wir diese Resultate zusammen, so haben wir den

Satz I. *Die allgemeinste Matrix $Y$, welche der Gleichung*

$$NY = YN'$$

*genügt, wo $N$ eine gegebene Matrix in der Normalform bedeutet, ist gegeben durch*

$$Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Y_{22} & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ 0 & . & \dots & Y_{rr} \end{pmatrix},$$

*wo $Y_{\varkappa\varkappa} = \Sigma_{\varkappa\varkappa} + \Theta_{\varkappa\varkappa}$ ist ($\varkappa = 1, 2, \dots, r$). Besitzt ferner die $Y_{\varkappa\varkappa}$ entsprechende Teilmatrix $N_\varkappa$ die Elementarteiler*

$$(\lambda - a_\varkappa)^{n_1},\ (\lambda - a_\varkappa)^{n_2}, \dots,\ (\lambda - a_\varkappa)^{n_m} \qquad (n_1 \geqq n_2 \geqq \dots \geqq n_m)$$

*so ist:*

$$\Sigma_{\varkappa\varkappa} = \begin{pmatrix} S_{n_1 n_1} & S_{n_1 n_2} & \dots & S_{n_1 n_m} \\ S_{n_2 n_1} & S_{n_2 n_2} & \dots & S_{n_2 n_m} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ S_{n_m n_1} & S_{n_m n_2} & \dots & S_{n_m n_m} \end{pmatrix},$$

$$\Theta_{\varkappa\varkappa} = \begin{Vmatrix} T_{n_1 n_1} & T_{n_1 n_2} & \dots & T_{n_1 n_m} \\ T_{n_2 n_1} & T_{n_2 n_2} & \dots & T_{n_2 n_m} \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ T_{n_m n_1} & T_{n_m n_2} & \dots & T_{n_m n_m} \end{Vmatrix},$$

*wo die* $S_{n_\alpha n_\beta}$ *bzw.* $T_{n_\alpha n_\beta}$ *durch* (15) *bzw.* (16) *und* (17) *definiert sind.*

Um die Anzahl $s$ bzw. $t$ der linear unabhängigen Matrizen $S$ bzw. $T$, welche $CS = SC'$ bzw. $CT = TC'$ genügen, zu finden, hat man nur die Anzahl der in $\Sigma_{\varkappa\varkappa}$ bzw. $\Theta_{\varkappa\varkappa}$ enthaltenen willkürlichen Größen abzuzählen. $S_{n_\alpha n_\beta}$ enthält $n_\beta$, $T_{n_\alpha n_\alpha}$ enthält 0, $T_{n_\alpha n_\beta}$ $(n_\alpha \neq n_\beta)$ enthält $n_\beta$ willkürliche Größen. Daraus ergibt sich die von Frobenius[2]) a. a. O. abgeleitete Formel

$$s = e_1 + 2e_2 + \dots,$$
$$t = e_2 + 2e_3 + \dots,$$

wobei $e_1, e_2, \dots,$ die Grade der zusammengesetzten Elementarteiler von $C - \lambda E$, der Größe nach geordnet, bedeuten.

## § 2.

### Über das Verschwinden der Determinante der Matrix $S$ bzw. $T$, welche der Gleichung $CS = SC'$ bzw. $CT = TC'$ genügt.

Die allgemeinste Matrix $S$, welche $NS = SN'$ genügt, war gegeben durch

$$S = \begin{Vmatrix} \Sigma_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Sigma_{22} & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ 0 & . & \dots & \Sigma_{\nu\nu} \end{Vmatrix},$$

wo $\Sigma_{\varkappa\varkappa}$ die in § 1 gegebene Form besitzt. Setzt man sämtliche Elemente von $S_{n_\alpha n_\beta}$ $(n_\alpha \neq n_\beta)$ und sämtliche Elemente von $S_{n_\alpha n_\alpha}$ gleich Null, außer $s_{n_\alpha}^{(n_\alpha n_\alpha)}$, die gleich 1 gesetzt werden, so ergibt sich $|S| = \pm 1$. Daraus folgt:

Satz I. *Es gibt stets eine symmetrische Matrix $S$ mit nicht verschwindender Determinante, welche der Gleichung $CS = SC'$ genügt.*

Die allgemeinste Matrix $T$, welche der Gleichung $NT = TN'$ genügt, zeigt dagegen, daß $|T|$ nicht stets von Null verschieden gewählt werden kann. Wenn z. B. $n_1 > n_2 \geqq n_3 \geqq \dots \geqq n_m$ ist, so folgt aus (16), daß $T_{n_1 n_2}, T_{n_1 n_3}, \dots, T_{n_1 n_m}$ in der letzten Zeile nur Nullen enthalten. Da aber $T_{n_1 n_1} = 0$, so hat $\Theta_{\varkappa\varkappa}$ in der einen Zeile nur Nullen und es ist $|\Theta_{\varkappa\varkappa}| = 0$, also auch $|T| = 0$. Es gilt der folgende

Satz II. *Die Gleichung $CT = TC'$ besitzt dann und nur dann eine alternierende Lösung $T$ von nicht verschwindender Determinante, wenn die Elementarteiler von $C - \lambda E$ paarweise auftreten.*

Zum Beweis schreibe ich die Normalform $E_*$ (vgl. § 1) in anderer Form. Ich will jetzt annehmen, $E_*$ hat den Elementarteiler $\lambda^{n_1}$ $\nu_1$ mal, den Elementarteiler $\lambda^{n_2}$ $\nu_2$ mal usw., dann kann ich $n_1 > n_2 > \ldots > n_m$ festsetzen.

Ich setze $E_{\nu_1}$ gleich der $\nu_1$-reihigen Einheitsmatrix

$$E_{\nu_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & . & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

dann besitzt die Matrix

$$N_{\nu_1}^{n_1} = \begin{pmatrix} 0 & E_{\nu_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & E_{\nu_1} & \ldots & 0 \\ . & . & . & \ldots & . \\ . & . & . & \ldots & . \\ 0 & . & . & \ldots & E_{\nu_1} \\ 0 & . & . & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

wo jede Zeile $n_1$ Matrizen enthält und jede 0 eine $\nu_1$-reihige Nullmatrix bedeutet, den Elementarteiler $\lambda^{n_1}$ gerade $\nu_1$ mal. Entsprechend fasse ich sämtliche Elementarteiler von $E_* - \lambda E$ zusammen und bekomme die Normalform:

$$E_* = \begin{pmatrix} N_{\nu_1}^{n_1} & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & N_{\nu_2}^{n_2} & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & N_{\nu_3}^{n_3} & \ldots \\ . & . & . & \ldots \\ . & . & . & \ldots \\ . & . & . & \ldots \end{pmatrix}, \tag{18}$$

Entsprechend setze ich

$$\mathsf{T} = \begin{pmatrix} \mathfrak{T}_{n_1 n_1} & \mathfrak{T}_{n_1 n_2} & \mathfrak{T}_{n_1 n_3} & \ldots \\ \mathfrak{T}_{n_2 n_1} & \mathfrak{T}_{n_2 n_2} & \mathfrak{T}_{n_2 n_3} & \ldots \\ \mathfrak{T}_{n_3 n_1} & \mathfrak{T}_{n_3 n_2} & \mathfrak{T}_{n_3 n_3} & \ldots \\ . & . & . & \ldots \\ . & . & . & \ldots \end{pmatrix}, \tag{19}$$

wo $\mathfrak{T}_{n_\alpha n_\beta} = -\mathfrak{T}'_{n_\beta n_\alpha}$ ist. $\mathfrak{T}_{n_\alpha n_\beta}$ enthält in jeder Zeile $n_\alpha$, in jeder Kolonne $n_\beta$ Matrizen. Ausführlich geschrieben sei:

$$(20) \qquad \mathfrak{T}_{n_\alpha n_\beta} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1\,n_\alpha} \\ T_{21} & T_{22} & \dots & T_{2\,n_\alpha} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ T_{n_\beta 1} & T_{n_\beta 2} & \dots & T_{n_\beta n_\alpha} \end{pmatrix},$$

wo $T_{pq} = -T'_{qp}$ ist. Aus der Gleichung:

$$\mathfrak{E}_* \mathsf{T} = \mathsf{T} \mathfrak{E}'_*$$

folgt jetzt wegen (18) und (19)

$$(21) \qquad N^{n_\alpha}_{r_\alpha} \mathfrak{T}_{n_\alpha n_\beta} = \mathfrak{T}_{n_\alpha n_\beta} N^{n_\beta}_{r_\beta}.$$

Für $n_\alpha = n_\beta$ folgt hieraus

$$\mathfrak{T}_{n_\alpha n_\alpha} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & \dots & . & . & T_{1\,n_\alpha} \\ -T'_{12} & T_{13} & T_{14} & \dots & . & T_{1\,n_\alpha} & 0 \\ -T'_{13} & -T'_{14} & T_{15} & \dots & T_{1\,n_\alpha} & 0 & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . & . \\ . & . & . & \dots & . & . & . \\ -T'_{1\,n_\alpha} & 0 & . & \dots & . & . & 0 \end{pmatrix}.$$

Für $n_\alpha > n_\beta$ ergibt sich für $\mathfrak{T}_{n_\alpha n_\beta}$ eine Matrix der Form

$$\mathfrak{T}_{n_\alpha n_\beta} = \left.\begin{pmatrix} * & * & \dots & . & * \\ * & * & \dots & * & 0 \\ . & . & \dots & . & . \\ . & . & \dots & . & . \\ * & 0 & \dots & . & 0 \\ 0 & 0 & \dots & . & 0 \\ . & . & \dots & . & . \\ . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & \dots & . & 0 \end{pmatrix}\right\} (n_\alpha - n_\beta)\,\text{Zeilen}),$$

wobei die Zeichen $*$ Matrizen bedeuten, auf deren genauere Bestimmung es nicht ankommt.

Als Beispiel setze ich die allgemeinste Lösung $\mathsf{T}$ für $n_1 = 5, n_2 = 4, n_3 = 2$ her:

$$\mathfrak{T} = \left(\begin{array}{ccccc|cccc|cc}
T_{11}^{(1)} & T_{12}^{(1)} & T_{13}^{(1)} & T_{14}^{(1)} & T_{15}^{(1)} & * & * & * & * & * & * \\
-T_{12}^{(1)\prime} & T_{13}^{(1)} & T_{14}^{(1)} & T_{15}^{(1)} & 0 & * & * & * & 0 & * & 0 \\
-T_{13}^{(1)\prime} & -T_{14}^{(1)\prime} & T_{15}^{(1)} & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-T_{14}^{(1)\prime} & -T_{15}^{(1)\prime} & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-T_{15}^{(1)\prime} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
* & * & * & * & 0 & T_{11}^{(2)} & T_{12}^{(2)} & T_{13}^{(2)} & T_{14}^{(2)} & * & * \\
* & * & * & 0 & 0 & -T_{12}^{(2)\prime} & T_{13}^{(2)} & T_{14}^{(2)} & 0 & * & 0 \\
* & * & 0 & 0 & 0 & -T_{13}^{(2)\prime} & -T_{14}^{(2)\prime} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & 0 & 0 & 0 & 0 & -T_{14}^{(2)\prime} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
* & * & 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 & T_{11}^{(3)} & T_{12}^{(3)} \\
* & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & -T_{12}^{(3)\prime} & 0
\end{array}\right).$$

Entwickelt man die Determinante von $\mathfrak{T}$ nach dem Satz von Laplace, so ergibt sich:

$$|\mathsf{T}| = \pm |T_{15}^{(1)}|^5 \cdot |T_{14}^{(2)}|^4 \cdot |T_{12}^{(3)}|^2.$$

Die Ordnung jeder der drei in dem Produkt auftretenden Determinanten gibt die Vielfachheit des entsprechenden Elementarteilers. Da eine alternierende Determinante ungerader Ordnung Null ist, so kann $|\mathsf{T}|$ stets dann und nur dann von Null verschieden gefunden werden, wenn sämtliche in dem Produkt auftretenden Determinanten von gerader Ordnung sind, d. h. wenn jeder Elementarteiler in gerader Vielfachheit auftritt. Genau so ergibt sich der Beweis allgemein. Dabei ist $n_1 > n_2 > n_3 > \ldots$ wesentlich; denn das ist der Grund, daß man bei der Laplaceschen Determinantenentwicklung sukzessive eine Zeile und eine Kolonne hat, in der nur eine von Null verschiedene Matrix steht.

## § 3.

## Über die Elementarteiler der Matrix $\begin{pmatrix} A-\lambda E & B \\ 0 & -\lambda E \end{pmatrix}$.

Es sei $A$ eine beliebige $n$-reihige quadratische Matrix, $B$ eine beliebige Matrix mit $n$ Zeilen und $m$ Spalten, wo $m$ gleich oder verschieden von $n$ ist, dann bilde ich die Matrix

$$\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und behaupte:

Satz III. *Jeder Elementarteiler von $A - \lambda E$, der nicht zur Basis $\lambda$ gehört, ist auch Elementarteiler von $\mathfrak{C} - \lambda E$.*

Es sei $(\lambda - \alpha)^\varkappa (\alpha \neq 0)$ ein Elementarteiler von $A - \lambda E$, so kann die Matrix $Q$ so bestimmt werden, daß:

$$(22) \qquad QAQ^{-1} = \begin{pmatrix} A^* & 0 \\ 0 & N_\alpha \end{pmatrix}, \quad \text{wo } N_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & & \alpha & 1 \\ 0 & \dots & & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

ist. Transformiere ich $\mathfrak{C}$ durch die Ähnlichkeitstransformation $\begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$ in $\mathfrak{C}^*$, so wird

$$\mathfrak{C}^* = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} QAQ^{-1} & QB \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt wegen (22):

$$\mathfrak{C}^* - \lambda E = \begin{pmatrix} A^* - \lambda E & 0 & Q_1 \\ 0 & N_\alpha - \lambda E & Q_2 \\ 0 & 0 & -\lambda E \end{pmatrix}, \quad \text{wenn } (Q \cdot B) = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}$$

gesetzt ist. Wir werden zeigen, daß durch elementare Umformungen sämtliche Elemente von $Q_2$ zu Null gemacht werden können; dann zerfällt aber $\mathfrak{C}^* - \lambda E$ in die beiden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} A^* - \lambda E & Q_1 \\ 0 & -\lambda E \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (N_\alpha - \lambda E),$$

und so folgt dann, daß $\mathfrak{C}^* - \lambda E$ und also auch $\mathfrak{C} - \lambda E$ den Elementarteiler $(\lambda - \alpha)^\varkappa$ besitzt.

Es genügt, wenn wir nur den Teil $\begin{pmatrix} N_\alpha - \lambda E & Q_2 \\ 0 & -\lambda E \end{pmatrix}$ betrachten. Die Elementartransformationen dieses Teiles würden in $\mathfrak{C}^* - \lambda E$ nur $Q_1$ verändern, was für den Beweis gleichgültig ist. Es sei

$$\left(\begin{array}{c|c} N_\alpha - \lambda E & Q_2 \\ \hline 0 & -\lambda E \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccccc|ccccc} \alpha-\lambda & 1 & 0 & \dots & . & 0 & q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1m} \\ 0 & \alpha-\lambda & 1 & \dots & . & 0 & q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2m} \\ . & . & . & \dots & . & . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . & . & . & . & \dots & . \\ 0 & . & . & \dots & \alpha-\lambda & 1 & . & . & \dots & . \\ 0 & . & . & \dots & . & \alpha-\lambda & q_{\varkappa 1} & q_{\varkappa 2} & \dots & q_{\varkappa m} \\ \hline 0 & . & . & \dots & . & 0 & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & . & . & \dots & . & 0 & 0 & -\lambda & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . & . & . & . & \dots & . \\ 0 & . & . & \dots & . & 0 & 0 & . & \dots & -\lambda \end{array}\right)$$

Ich subtrahiere die mit $\frac{q_{\varkappa 1}}{\alpha}$ multiplizierte letzte Spalte in $\begin{pmatrix} N_\alpha - \lambda E \\ 0 \end{pmatrix}$ von der ersten Spalte in $\begin{pmatrix} Q_2 \\ -\lambda E \end{pmatrix}$, die mit $\frac{q_{\varkappa 2}}{\alpha}$ multiplizierte selbe Spalte in $\begin{pmatrix} N_\alpha - \lambda E \\ 0 \end{pmatrix}$ von der zweiten Spalte in $\begin{pmatrix} Q_2 \\ -\lambda E \end{pmatrix}$ usw., die mit $\frac{q_{\varkappa m}}{\alpha}$ multiplizierte selbe Spalte in $\begin{pmatrix} N_\alpha - \lambda E \\ 0 \end{pmatrix}$ von der letzten Spalte in $\begin{pmatrix} Q_2 \\ -\lambda E \end{pmatrix}$. Dann addiere ich die mit $\frac{q_{\varkappa 1}}{\alpha}$ multiplizierte erste Zeile von $(0 - \lambda E)$ zu der letzten Zeile von $(N_\alpha - \lambda E \; Q_2)$, die mit $\frac{q_{\varkappa 2}}{\alpha}$ multiplizierte zweite Zeile von $(0 - \lambda E)$ zu der letzten Zeile von $(N_\alpha - \lambda E \; Q_2)$ usw., die mit $\frac{q_{\varkappa m}}{\alpha}$ multiplizierte letzte Zeile von $(0 - \lambda E)$ zu der letzten Zeile von $(N_\alpha - \lambda E \; Q_2)$. Hierdurch bekommt $Q_2$ die Form:

$$Q_2 = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1m} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ q_{\varkappa-2,1} & q_{\varkappa-2,2} & \cdots & q_{\varkappa-2,m} \\ q^*_{\varkappa-1,1} & q^*_{\varkappa-1,2} & \cdots & q^*_{\varkappa-1,m} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix},$$

wo $$q^*_{\varkappa-1,\lambda} = q_{\varkappa-1,\lambda} - \frac{q_{\varkappa\lambda}}{\alpha} \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, m)$$

gesetzt ist, während der andere Teil von $\begin{pmatrix} N_\alpha - \lambda E & Q_2 \\ 0 & -\lambda E \end{pmatrix}$ unverändert bleibt. Durch ein analoges Verfahren werden sämtliche Zeilen von $Q_2$ zum Verschwinden gebracht. Damit ist der Satz III bewiesen. Haben $A$, $B$, $\mathfrak{C}$ wieder dieselbe Bedeutung, so gilt ferner der

Satz IV. *Sind $\lambda^{n_1}$, $\lambda^{n_2}$, ..., $\lambda^{n_\rho}$ die sämtlichen zur Basis $\lambda$ gehörenden Elementarteiler von $A - \lambda E$, so gibt es zu jedem $\lambda^{n_\varkappa}$ einen Elementarteiler von $\mathfrak{C} - \lambda E$ gleich $\lambda^{n_\varkappa}$ oder gleich $\lambda^{n_\varkappa+1}$; und dies sind die sämtlichen nicht linearen Elementarteiler von $\mathfrak{C} - \lambda E$, die zur Basis $\lambda$ gehören.*

Wegen der Voraussetzung gibt es eine Matrix $R$, so daß

$$RAR^{-1} = \begin{pmatrix} A^* & 0 \\ 0 & N_0 \end{pmatrix}, \tag{23}$$

wo $N_0 - \lambda E$ nur die Elementarteiler $\lambda^{n_1}$, $\lambda^{n_2}$, ..., $\lambda^{n_\rho}$ enthält und $A^* - \lambda E$ keinen zur Basis $\lambda$ gehörenden Elementarteiler besitzt. Dann wird

$$\mathfrak{C}^* = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} RAR^{-1} & RB \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und wegen (23) ist

$$\mathfrak{C}^* - \lambda E = \begin{pmatrix} A^* - \lambda E & 0 & R_1 \\ 0 & N_0 - \lambda E & R_2 \\ 0 & 0 & -\lambda E \end{pmatrix},$$

wo $(R \cdot B) = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}$ gesetzt ist.

Da $A^* - \lambda E$ keinen zur Basis $\lambda$ gehörenden Elementarteiler besitzt so kann man, genau wie beim Beweis des Satz III das $Q_2$ zum Ver schwinden gebracht wurde, hier $R_1$ zum Verschwinden bringen. Der Beweis von Satz IV wird also erbracht sein, wenn wir es für $\begin{pmatrix} N_0 - \lambda E & R_2 \\ 0 & -\lambda E \end{pmatrix}$ bewiesen haben. Wir schreiben diesen Teil ausführlich in der Form:

$$\left(\begin{array}{c|c} N_0 - \lambda E & R_2 \\ \hline 0 & -\lambda E \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} N_{n_1} & 0 & \dots & 0 & R_2^{(n_1)} \\ 0 & N_{n_2} & \dots & 0 & R_2^{(n_2)} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \dots & N_{n_\rho} & R_2^{(n_\rho)} \\ \hline 0 & \cdot & \dots & 0 & -\lambda E \end{array}\right),$$

wo

$$N_{n_\alpha} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1. & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \cdot & \dots & -\lambda \end{pmatrix}$$

eine $n_\alpha$-reihige Matrix ist und $R_2^{(n_\alpha)}$ $n_\alpha$ Zeilen und $m$ Spalten hat.

Es sei

$$\left(\begin{array}{c|c} N_{n_\rho} & R_2^{(n_\rho)} \\ \hline 0 & -\lambda E \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccccc|ccc} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & r_{11} & \dots & r_{1m} \\ 0 & -\lambda & 1 & \dots & 0 & r_{21} & \dots & r_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \dots & -\lambda & r_{n_\rho 1} & \dots & r_{n_\rho m} \\ \hline 0 & \cdot & \cdot & \dots & 0 & -\lambda & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \dots & 0 & 0 & \dots & -\lambda \end{array}\right).$$

Ich setze

$$P_{n_\rho m} = \left(\begin{array}{c|c} E_{n_\rho} & R_{n_\rho m} \\ \hline 0 & E_m \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1m} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2m} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \cdot & \dots & 1 & r_{n_\rho-1,1} & \cdot & \dots & r_{n_\rho-1,m} \\ \hline 0 & \cdot & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \cdot & \dots & 0 & 0 & \cdot & \dots & 1 \end{array}\right),$$

$$Q_{n_\rho, m} = \left(\begin{array}{c|c} E_{n_\rho} & -R_{n_\rho m} \\ \hline 0 & E_m \end{array}\right),$$

dann folgt

$$P_{n_\rho m} \cdot \begin{pmatrix} N_{n_\rho} & R_2^{(n_\rho)} \\ 0 & -\lambda E \end{pmatrix} \cdot Q_{n_\rho m} = \left(\begin{array}{ccccc|cccc} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \cdot & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 & \cdot & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \dots & 1 & 0 & \cdot & \dots & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \dots & -\lambda & r_{n_\rho 1} & \cdot & \dots & r_{n_\rho m} \\ \hline 0 & \cdot & \cdot & \dots & 0 & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \dots & 0 & 0 & -\lambda & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \dots & 0 & 0 & \cdot & \dots & -\lambda \end{array}\right).$$

Transformiert man $\begin{pmatrix} N_0 - \lambda E & R_2 \\ 0 & -\lambda E \end{pmatrix}$ durch die analoge Transformation

$$P = \left(\begin{array}{cccc|c} E_{n_1} & 0 & \dots & 0 & R_{n_1 m} \\ 0 & E_{n_2} & \dots & 0 & R_{n_2 m} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \dots & E_{n_\rho} & R_{n_\rho m} \\ \hline 0 & \cdot & \dots & 0 & E_m \end{array}\right), \qquad Q = \left(\begin{array}{cccc|c} E_{n_1} & 0 & \dots & 0 & -R_{n_1 m} \\ 0 & E_{n_2} & \dots & 0 & -R_{n_2 m} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \dots & E_{n_\rho} & -R_{n_\rho m} \\ \hline 0 & \cdot & \dots & 0 & E_m \end{array}\right),$$

so ist:

$$P \cdot \begin{pmatrix} N_0 - \lambda E & R_2 \\ 0 & -\lambda E \end{pmatrix} \cdot Q = \mathfrak{N},$$

wenn

$$\mathfrak{N} = \left(\begin{array}{ccc|c} N_{n_1} & 0 & \dots & \begin{matrix} 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & 0 \\ r_{n_1 1} & \dots & r_{n_1 m} \end{matrix} \\ \hline 0 & N_{n_2} & \dots & \begin{matrix} 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & 0 \\ r_{n_2 1} & \dots & r_{n_2 m} \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ N_{n_p} \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & 0 \\ r_{n_p 1} & \dots & r_{n_p m} \end{matrix} \\ \hline 0 & 0 & 0 & \begin{matrix} -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \dots & & -\lambda \end{matrix} \end{array}\right)$$

ist. Um die spätere Transformation übersichtlicher zu machen, beweisen wir zunächst, daß die Matrix

$$\left(\begin{array}{c|c} N_{n_1} & 0 \\ \hline 0^* & N_{n_2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cccc|ccc} -\lambda & 1 & 0 \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda & 1 \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & 0 & -\lambda \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \cdot & \cdot \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 c \cdot \lambda & 0 & \dots & -\lambda \end{array}\right)$$

äquivalent ist zu der Matrix:

$$\left(\begin{array}{c|c} N_{n_1} & 0 \\ \hline 0 & N_{n_2} \end{array}\right).$$

Wir können $n_1 \geqq n_2 \geqq \dots \geqq n_k$ annehmen.

Setzt man dann:

$$P_{n_2 n_1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -c & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & -c & \dots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \; -c \; 0 \\ \underbrace{0 \; \cdot \; \dots \; 0}_{(n_1 - n_2)\text{ Spalten}} & & & \underbrace{0 \; \cdot \; \cdot \; 0}_{n_2\text{ Spalten}} & & & 0 \; 0 \end{pmatrix}, \quad Q_{n_2 n_1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & c & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & c & \dots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \; c \; 0 \\ \underbrace{0 \; \dots \; 0}_{(n_1 - n_2)\text{ Spalten}} & & & \underbrace{0 \; \cdot \; \cdot \; 0 \; 0}_{n_2\text{ Spalten}} & & & c \end{pmatrix},$$

so folgt:

$$\begin{pmatrix} E_{n_1} & 0 \\ P_{n_2 n_1} & E_{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_{n_1} & 0 \\ 0^* & N_{n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{n_1} & 0 \\ Q_{n_2 n_1} & E_{n_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_{n_1} & 0 \\ 0 & N_{n_2} \end{pmatrix}.$$

Bezeichne ich mit $\mathfrak{N}^*$ die Matrix, welche aus $\mathfrak{N}$ hervorgeht, wenn an Stelle der Teilmatrix $\begin{pmatrix} N_{n_1} & 0 \\ 0 & N_{n_2} \end{pmatrix}$ die Teilmatrix $\begin{pmatrix} N_{n_1} & 0 \\ 0^* & N_{n_2} \end{pmatrix}$ tritt, so geht durch dieselbe Transformation, welche die Teilmatrizen ineinander überführt auch $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}^*$ ineinander über; das liegt daran, daß $P_{n_2 n_1}$ in der letzten Spalte nur Nullen enthält. Noch allgemeiner erkennt man, daß jede Matrix $\mathfrak{N}^*$, die aus $\mathfrak{N}$ hervorgeht, indem man irgendeine der links von $N_{n_2} \dots N_{n_\rho}$ stehenden 0 Matrizen durch $0^*$ ersetzt, äquivalent zu $\mathfrak{N}$ ist.

Wir schreiben jetzt den Teil $\begin{pmatrix} R_2 \\ -\lambda E \end{pmatrix}$ ausführlich. Dieser hatte durch die Transformation (S. 15) folgende Form bekommen:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ r_{n_1 1} & r_{n_1 2} & \cdots & r_{n_1 m} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ r_{n_2 1} & r_{n_2 2} & \cdots & r_{n_2 m} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ r_{n_\rho 1} & r_{n_\rho 2} & \cdots & r_{n_\rho m} \\ -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda . \end{matrix}$$

Wären in der $n_1$-ten Zeile sämtliche $r_{n_1 1}, \ldots, r_{n_1 m}$ gleich Null, so hätte $\mathfrak{R}$, also auch $\begin{pmatrix} N_0 - \lambda E & R_2 \\ 0 & -\lambda E \end{pmatrix}$ den Elementarteiler $\lambda^{n_1}$. Diesen kann ich abspalten und den Schluß auf den übriggebliebenen Teil von $\mathfrak{R}$ wiederholen. Sei also von den Größen $r_{n_\alpha 1}, \ldots, r_{n_\alpha m}$ mindestens eins, etwa $r_{n_\alpha k}$ das erste Element, welches ungleich Null ist, dann addiere ich, wenn $k \neq 1$ ist, die $k$-te Spalte zur ersten Spalte. Das bei dieser Umformung in der unten stehenden Matrix neu auftretende Element $-\lambda$ wird sogleich durch Subtraktion der ersten Zeile von $(-\lambda E)$ zu Null gemacht. Ich kann also von vornherein $r_{n_\alpha 1} \neq 0$ annehmen und kann dann durch Subtraktion der mit einer Konstanten multiplizierten ersten Spalte erreichen, daß $r_{n_\alpha 2}, r_{n_\alpha 3}, \ldots, r_{n_\alpha m}$ zu Null werden. Die dabei in der ersten Zeile der Matrix $(-\lambda E)$ auftretenden Größen $c \cdot \lambda$ werden durch Subtraktion der mit einer entsprechenden Konstanten multiplizierten Zeilen von $(-\lambda E)$ beseitigt. Sind ferner alle Größen $r_{n_{\alpha+1} 1}, r_{n_{\alpha+1} 2}, \ldots, r_{n_{\alpha+1} m}$ gleich Null, so kann ich wieder einen Elementarteiler abspalten. Es mögen nun die Größen $r_{n_\beta 1}, r_{n_\beta 2}, \ldots, r_{n_\beta m}$ nicht sämtlich verschwinden. Wäre $r_{n_\beta 1} \neq 0$, so mache ich durch Subtraktion der mit einer Konstanten multiplizierten Zeile, die nur $r_{n_\alpha 1}$ enthält, $r_{n_\beta 1}$ zu Null. Dabei tritt an Stelle einer Teilmatrix 0 die Teilmatrix $0^*$, die aber mit Hilfe der auf Seite 16 angegebenen Transformation zu 0 gemacht wird. Jetzt können wieder entweder alle Größen $r_{n_\beta 2}, r_{n_\beta 3}, \ldots, r_{n_\beta m}$ verschwinden, dann kann ich einen Elementarteiler abspalten, oder es ist mindestens eine ungleich Null, dann kann ich die Schlußweise, die ich auf $r_{n_\alpha 1}, r_{n_\alpha 2}, \ldots, r_{n_\alpha m}$ angewandt habe, auf $r_{n_\beta 2}, r_{n_\beta 3}, \ldots, r_{n_\beta m}$ anwenden und kann erreichen, daß $r_{n_\beta 2} \neq 0$, $r_{n_\beta 3} = 0$, $r_{n_\beta 4} = 0, \ldots, r_{n_\beta m} = 0$ wird.

Dies Verfahren setze ich fort und erhalte, wenn nicht sämtliche Elementarteiler von $A - \lambda E$ abspaltbar, d. h. Elementarteiler von $C - \lambda E$ sind, für den Teil von $\mathfrak{R}$, der nach der Abspaltung übrig bleibt, eine Matrix der Form:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
\hline
\begin{matrix} 0 & \dots & 0 \\ 1 & \dots & 0 \\ \dots & & \cdot \\ \dots & & \cdot \\ \cdot & -\lambda & 1 \\ \cdot & 0 & -\lambda \end{matrix} & 0 & \cdot & \cdot & \begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ r_{n_{\alpha^1}} & 0 & \dots & 0 \end{matrix} & 0 \\
\hline
0 & \begin{matrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \dots & -\lambda\ 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \dots & 0\ -\lambda \end{matrix} & \cdot & \cdot & \begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots 0 \\ 0 & r_{n_{\beta^2}} & 0 & \dots 0 \end{matrix} & 0 \\
\hline
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\hline
0 & 0 & \cdot & \begin{matrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & \cdot & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \dots & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \dots & -\lambda & 1 \\ 0 & \cdot & \cdot & \dots & 0 & -\lambda \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & r_{n_{\mu\rho}} \end{matrix} & 0 \\
\hline
0 & 0 & \cdot & \cdot & \begin{matrix} -\lambda & 0 & \dots & \cdot & 0 \\ 0 & -\lambda & \dots & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \dots & -\lambda & 0 \\ 0 & \cdot & \dots & 0 & -\lambda \end{matrix} & 0 \\
\hline
0 & 0 & \cdot & 0 & 0 & \begin{matrix} -\lambda & 0 & \dots & \cdot & 0 \\ 0 & -\lambda & \dots & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \dots & -\lambda & 0 \\ 0 & \cdot & \dots & 0 & -\lambda \end{matrix} \\
\hline
\end{array}$$

Diese Matrix zerfällt in die Matrizen:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & -\lambda & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 0 & -\lambda & r_{n_{\alpha^1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \dots & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \dots & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \dots & 0 & -\lambda & r_{n_{\beta^2}} \\ 0 & \cdot & \cdot & \dots & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 & \dots & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & \dots & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \dots & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \dots & 0 & -\lambda & r_{n\mu\rho} \\ 0 & \cdot & \cdot & \dots & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

und in die Matrix

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ 0 & . & \dots & -\lambda \end{pmatrix}.$$

*Damit haben wir gezeigt: Zu jedem Elementarteiler $\lambda^{n_k}$ von $A - \lambda E$ der nicht abgespalten werden kann, d. h. der nicht Elementarteiler von $\mathfrak{C} - \lambda E$ ist, gehört ein Elementarteiler $\lambda^{n_k+1}$ von $\mathfrak{C} - \lambda E$; außerdem kann $\mathfrak{C} - \lambda E$ nur noch lineare Elementarteiler zur Basis $\lambda$ besitzen. Dieses ist die Behauptung des Satz* IV.

## § 4.

## Die Darstellbarkeit einer Matrix als Produkt von zwei symmetrischen und als Produkt von zwei alternierenden Matrizen.

Nach dem Satz I gibt es zu jeder Matrix $C$ stets eine symmetrische Matrix $S$, welche der Gleichung $CS = SC'$ genügt, wo $|S| \neq 0$ ist. Daraus folgt:

$$C = SC'S^{-1}$$

Da $SC'$ wegen $CS = SC'$ eine symmetrische Matrix ist, so folgt der Satz (vgl. Frobenius a. a. O.[2]) S. 9):

Satz V. *Jede Matrix läßt sich als Produkt von zwei symmetrischen Matrizen darstellen, deren eine eine von Null verschiedene Determinante besitzt.*

Ist

$$CT = TC' \quad \text{und} \quad |T| \neq 0,$$

so folgt

$$C = TC'T^{-1},$$

d. h. $C$ ist als Produkt von zwei alternierenden Matrizen dargestellt. Aus dem Satz II folgt jetzt:

Satz VI. *Eine Matrix $C$ ist dann und nur dann in der Form $C = T_1 \cdot T_2$, wo $|T_1| \neq 0$ ist, darstellbar, wenn alle Elementarteiler von $C - \lambda E$ paarweise auftreten.*

Mit Hilfe der Sätze des § 3 können wir jetzt leicht den Hauptsatz beweisen:

Satz VII. *Eine Matrix $C$ läßt sich dann und nur dann als Produkt von zwei alternierenden Matrizen darstellen, wenn die Elementarteiler von $C - \lambda E$ folgende Bedingung erfüllen:*

1. *Alle Elementarteiler der Form* $(\lambda - a)^n$, $a \neq 0$, *treten paarweise auf.*

2. *Alle Elementarteiler zur Basis* $\lambda$ *lassen sich zu Paaren zusammenfassen, wobei jedes Paar die Form* $(\lambda^m, \lambda^m)$ *oder* $(\lambda^m, \lambda^{m+1})$ *besitzt* $(m \geqq 1)$. *Dazu kann noch ein linearer Elementarteiler* $\lambda$ *auftreten.*

Daß die Bedingungen hinreichend sind, folgt so:

1. Jede Matrix, deren Elementarteiler nur paarweise auftreten, läßt sich nach Satz VI als Produkt zweier alternierender Matrizen darstellen.

2. Es habe $N_m - \lambda E$ die Elementarteiler $\lambda^{m+1}, \lambda^m$.

$$N_m = \left(\begin{array}{c|c} \mathfrak{N}_p & 0 \\ \hline 0 & \mathfrak{N}_q \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} 0&1&0&\dots&0&0 & 0&0&\dots&0&0 \\ 0&0&1&\dots&0&0 & \cdot&\cdot&\dots&\cdot&\cdot \\ \cdot&\cdot&\cdot&\dots&\cdot&\cdot & \cdot&\cdot&\dots&\cdot&\cdot \\ \cdot&\cdot&\cdot&\dots&\cdot&\cdot & \cdot&\cdot&\dots&\cdot&\cdot \\ 0&0&\cdot&\dots&0&1 & \cdot&\cdot&\dots&\cdot&\cdot \\ 0&0&\cdot&\dots&0&0 & 0&0&\dots&0&0 \\ \hline 0&0&\cdot&\dots&0&0 & 0&1&0&\dots&0&0 \\ \cdot&\cdot&\cdot&\dots&\cdot&\cdot & 0&0&1&\dots&0&0 \\ \cdot&\cdot&\cdot&\dots&\cdot&\cdot & \cdot&\cdot&\cdot&\dots&\cdot&\cdot \\ \cdot&\cdot&\cdot&\dots&\cdot&\cdot & \cdot&\cdot&\cdot&\dots&\cdot&\cdot \\ \cdot&\cdot&\cdot&\dots&\cdot&\cdot & 0&0&\cdot&\dots&0&1 \\ 0&0&\cdot&\dots&0&0 & 0&0&\cdot&\dots&0&0 \end{array}\right),$$

wobei $\mathfrak{N}_p$ $(m+1)$-reihig und $\mathfrak{N}_q$ $m$-reihig ist.

Dann ist

$$N_m = \left(\begin{array}{cc|cc} \overbrace{0\,0\dots0\,0}^{(m+1)\text{ Spalten}} & & \overbrace{0\,0\dots0\,-1}^{m\text{ Spalten}} & \\ \cdot\;\cdot\dots\cdot\;\cdot & \} (m+1)\text{ Zeilen} & 0\,0\dots-1\,0 & \\ \cdot\;\cdot\dots\cdot\;\cdot & & \cdot\;\cdot\dots\cdot\;\cdot & \\ \cdot\;\cdot\dots\cdot\;\cdot & & \cdot\;\cdot\dots\cdot\;\cdot & \\ \cdot\;\cdot\dots\cdot\;\cdot & & 0\,-1\dots0\,0 & \\ \cdot\;\cdot\dots\cdot\;\cdot & & -1\,0\dots0\,0 & \\ 0\,0\dots0\,0 & & 0\,0\dots0\,0 & \\ \hline 0\,0\,..\,0\,1\,0 & \} m\text{ Zeilen} & 0\,0\dots0\,0 & \\ 0\,0\,..\,1\,0\,0 & & \cdot\;\cdot\dots\cdot\;\cdot & \\ \cdot\;\cdot\dots\cdot\;\cdot & & \cdot\;\cdot\dots\cdot\;\cdot & \\ \cdot\;\cdot\dots\cdot\;\cdot & & \cdot\;\cdot\dots\cdot\;\cdot & \\ 0\,1\,..\,0\,0\,0 & & \cdot\;\cdot\dots\cdot\;\cdot & \\ 1\,0\,..\,0\,0\,0 & & 0\,0\dots0\,0 & \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cc|cc} \overbrace{0\,0\dots0\,0}^{(m+1)\text{ Spalten}} & & \overbrace{0\,0\dots0\,0}^{m\text{ Spalten}} & \\ \cdot\;\cdot\dots\cdot\;\cdot & & 0\,0\dots0\,1 & \} (m+1)\text{ Zeilen} \\ \cdot\;\cdot\dots\cdot\;\cdot & & \cdot\;\cdot\dots\cdot\;\cdot & \\ \cdot\;\cdot\dots\cdot\;\cdot & & \cdot\;\cdot\dots\cdot\;\cdot & \\ \cdot\;\cdot\dots\cdot\;\cdot & & 0\,1\,0\,..\,0\,0 & \\ \cdot\;\cdot\dots\cdot\;\cdot & & 1\,0\,0\,..\,0\,0 & \\ 0\,0\dots0\,0 & & \cdot\;\cdot\dots\cdot\;\cdot & \\ \hline 0\,0\dots0\,-1 & & 0\,0\dots0\,0 & \\ 0\,0\dots-1\,0 & & \cdot\;\cdot\dots\cdot\;\cdot & \\ \cdot\;\cdot\dots\cdot\;\cdot & & \cdot\;\cdot\dots\cdot\;\cdot & \\ \cdot\;\cdot\dots\cdot\;\cdot & & \cdot\;\cdot\dots\cdot\;\cdot & \\ 0\,0\,-1\,..\,0\,0 & & \cdot\;\cdot\dots\cdot\;\cdot & \\ 0\,-1\,0\,..\,0\,0 & & 0\,0\dots0\,0 & \} m\text{ Zeilen} \end{array}\right).$$

Also ist $N_m$ als Produkt zweier alternierender Matrizen dargestellt.

3. Man kann jede Matrix, die nur den Elementarteiler $\lambda$ enthält durch $0 = 0 \cdot 0$ als Produkt zweier alternierender Matrizen darstellen.

Wir können also auch jede Matrix, deren Elementarteiler sich aus den drei erwähnten Typen zusammensetzen, als Produkt zweier alternierender Matrizen darstellen.

Daß die Bedingungen notwendig sind, damit $C = T_1 \cdot T_2$ gesetzt werden kann, folgt für $|T_1| \neq 0$ aus dem Satz VI.

Wir setzen jetzt $|T_1| = 0$ voraus; und es sei $C = T_1 \cdot T_2$. Wegen

$$PCP^{-1} = (PT_1P') \cdot (P'^{-1}T_2P^{-1}) = \mathsf{T}_1 \cdot \mathsf{T}_2$$

kann auf $T_1$ eine kongruente Transformation ausgeübt werden; wir können also setzen:

$$\mathsf{T}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & . & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & . & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & . & 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & . & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & . & \dots & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & . & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . & . & \dots & . \\ . & . & . & \dots & . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & . & \dots & . & . & . & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

dann wird

$$\mathsf{T}_1 \cdot \mathsf{T}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\varkappa} & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\varkappa} & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ . & . & \dots & . & . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . & . & . & \dots & . \\ a_{\varkappa 1} & a_{\varkappa 2} & \dots & a_{\varkappa\varkappa} & b_{\varkappa 1} & b_{\varkappa 2} & \dots & b_{\varkappa m} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & \dots & . & . & . & \dots & . \\ . & . & \dots & . & . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & . & . & . & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wo $A$ das Produkt der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & . & 0 \\ -1 & 0 & \dots & . & 0 \\ . & . & \dots & . & . \\ . & . & \dots & . & . \\ 0 & . & \dots & 0 & 1 \\ 0 & . & \dots & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit der entsprechenden Teilmatrix von $\mathsf{T}_2$ ist. Da $|M| \neq 0$ ist, so müssen nach Satz VI sämtliche Elementarteiler von $A - \lambda E$ paarweise auftreten. Alle nicht zur Basis $\lambda$ gehörenden Elementarteiler von $\mathsf{T}_1 \cdot \mathsf{T}_2 - \lambda E$ haben dann wegen Satz III gewiß die behauptete Form.

Sei ferner $(\lambda^m, \lambda^m)$ ein zur Basis $\lambda$ gehörendes Elementarteilerpaar von $A - \lambda E$, so können wegen Satz IV in $\mathsf{T}_1 \cdot \mathsf{T}_2 - \lambda E$ nur Elementarteilerpaare der Form $(\lambda^m, \lambda^m)$ und $(\lambda^m, \lambda^{m+1})$ außer Elementarteilern $\lambda$ auftreten. Damit ist Satz VII bewiesen.

## § 5.

## Über die Darstellbarkeit einer Matrix als Produkt einer alternierenden und einer symmetrischen Matrix.

Satz VII. *Eine Matrix $C$ läßt sich dann und nur dann in der Form $C = T \cdot S$ (oder $C = S \cdot T$) darstellen, wenn zu jedem Elementarteiler von $C - \lambda E$ der Form $(\lambda - \alpha)^\varkappa$ $(\alpha \neq 0)$ ein zweiter $(\lambda + \alpha)^\varkappa$ gehört.*

Ist $C = T \cdot S$, so folgt

$$C^* = PCP^{-1} = (PTP')(P'^{-1}SP^{-1}) = \mathsf{T} \cdot \Sigma.$$

Wir können daher für $\mathsf{T}$ wieder die Normalform der vorigen Seite setzen oder $|\mathsf{T}| \neq 0$ annehmen. Ist $|\mathsf{T}| \neq 0$, so hat $C^* - \lambda E$ und $\mathsf{T}^{-1}(C^* - \lambda E) = \Sigma - \lambda \mathsf{T}^{-1}$ dieselben Elementarteiler. Ist dagegen $|\mathsf{T}| = 0$, so folgt wie auf der vorigen Seite

$$C^* = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wo $A = T_1 \cdot S_1$ und $|T_1| \neq 0$ ist. Wegen $T_1^{-1}(A - \lambda E) = S_1 - \lambda T_1^{-1}$ hat $A - \lambda E$ dieselben Elementarteiler wie $S_1 - \lambda T_1^{-1}$.

Nach einem Satz über Elementarteiler[4]) hat die Matrix $\Sigma - \lambda \mathsf{T}^{-1}$ bzw. $S_1 - \lambda T_1^{-1}$ zu jedem Elementarteiler $(\lambda - \alpha)^\varkappa$, $\alpha \neq 0$, einen zweiten $(\lambda + \alpha)^\varkappa$; ferner treten die Elementarteiler der Gestalt $\lambda^{2\nu+1}$ paarweise auf. $C^* - \lambda E$ besitzt also, auch wenn $|\mathsf{T}| = 0$ ist, zu jedem Elementarteiler $(\lambda - \alpha)^\varkappa$, $\alpha \neq 0$, einen zweiten $(\lambda + \alpha)^\varkappa$.

Daß die Bedingungen auch hinreichend sind, folgt so:

1. Es sei

$$N_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & . & . & \dots & \alpha & 1 \\ 0 & . & . & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

[4]) Muth, Theorie und Anwendung der Elementarteiler, Leipzig 1899 S. 232.

eine $\varkappa$-reihige Matrix und

$$N = \begin{pmatrix} N_\alpha & 0 \\ 0 & -N_\alpha \end{pmatrix}.$$

Dann besitzt $N - \lambda E$ die Elementarteiler $(\lambda + \alpha)^\varkappa$, $(\lambda - \alpha)^\varkappa$. Setzt man ferner:

$$E^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (\varkappa \text{ Zeilen, } \varkappa \text{ Spalten})$$

so ist

$$\begin{pmatrix} N_\alpha & 0 \\ 0 & -N_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & E^* \\ -E^* & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & E^* N_\alpha \\ E^* N_\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

wegen $E^{*2} = E$. Dadurch ist $N$ in der gewünschten Form dargestellt.

2. Die $2\nu$-reihige Matrix ($\nu \geqq 1$)

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc}
0 & -1 & 0 & \dots & . & 0 & 0 & 0 & . & \dots & . & 0 \\
0 & 0 & -1 & \dots & . & 0 & 0 & 0 & . & \dots & . & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\
0 & . & . & \dots & 0 & -1 & 0 & 0 & . & \dots & . & 0 \\
0 & . & . & \dots & 0 & 0 & -1 & 0 & . & \dots & . & 0 \\
\hline
0 & . & . & \dots & . & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & . & 0 \\
0 & . & . & \dots & . & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & . & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\
0 & . & . & \dots & . & 0 & 0 & 0 & . & \dots & 0 & 1 \\
0 & . & . & \dots & . & 0 & 0 & 0 & . & \dots & 0 & 0
\end{array}\right)$$

($\nu$ Spalten, $\nu$ Spalten; $\nu$ Zeilen, $\nu$ Zeilen)

besitzt den Elementarteiler $\lambda^{2\nu}$ und ist gleich dem Produkt

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}
0 & . & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \\
0 & . & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
0 & . & \dots & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\
\hline
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
1 & 0 & \dots & . & 0 & . & \dots & 0
\end{array}\right)$$

($\nu$ Spalten, $\nu$ Spalten; $\nu$ Zeilen, $\nu$ Zeilen)

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}
0 & . & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & . & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
0 & . & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
\hline
0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\
0 & 1 & \dots & 0 & 0 & . & \dots & 0
\end{array}\right)$$

($\nu$ Spalten, $\nu$ Spalten; $\nu$ Zeilen, $\nu$ Zeilen)

3. Die $(2\nu+1)$-reihige Matrix $(\nu \geqq 0)$:

$$\left(\begin{array}{c|c}
\overbrace{\begin{matrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \dots & 0 & 1 \end{matrix}}^{(\nu+1)\text{ Spalten}} & \overbrace{\begin{matrix} 0 & \cdot & \dots & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \dots & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \dots & \cdot & 0 \end{matrix}}^{\nu\text{ Spalten}} \quad \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\b\\c\\d\\e\end{matrix}}\right\}\nu\text{ Zeilen} \\
\hline
\begin{matrix} 0 & \cdot & \dots & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \dots & \cdot & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{matrix} \quad \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\b\\c\\d\\e\\f\end{matrix}}\right\}(\nu+1)\text{ Zeilen}
\end{array}\right)$$

esitzt den Elementarteiler $\lambda^{2\nu+1}$ und ist gleich dem Produkt

$$\left(\begin{array}{c|c|c}
\overbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & \dots & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \cdot & 0 & 0 \end{matrix}}^{\nu\text{ Spalten}} & \overbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \dots & \cdot & \cdot & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \cdot & \cdot & 0 \end{matrix}}^{(\nu+1)\text{ Spalten}} & \overbrace{\begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{matrix}}^{(2\nu+1)\text{ Spalten}} \quad \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\b\\c\\d\\e\\f\\g\\h\end{matrix}}\right\}(2\nu+1)\text{ Zeilen} \\
\hline
\begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1 & 0 & \dots & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \cdot & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \dots & \cdot & 0 \end{matrix} & \\
\left.\vphantom{\begin{matrix}a\\b\\c\\d\\e\\f\end{matrix}}\right\}(\nu+1)\text{ Zeilen} & \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\b\\c\\d\\e\\f\end{matrix}}\right\}\nu\text{ Zeilen} &
\end{array}\right)$$

Ferner läßt sich jede Matrix, deren Elementarteiler aus den Elementarilern der erwähnten Typen zusammengesetzt sind, in der Form $T \cdot S$ rstellen.

Daß die Bedingungen auch für die Darstellung der Matrix $C$ in der orm $S \cdot T$ notwendig und hinreichend sind, ergibt sich aus der Ähnlichit der beiden Matrizen: $C = T \cdot S$ und $C' = S \cdot T'$.

(Eingegangen am 16. September 1920.)

# Die Elementartheoreme bei den Riemannschen Transzendenten.

Von

Robert König in Münster i. W.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

I. Abschnitt. Vorbereitungen.

§ 1. Definition der Riemannschen Transzendenten.

§ 2. Die Verzweigungsstellen.

§ 3. Begriff des Multiplums.

§ 4. Sätze.

II. Abschnitt. Aufstellung der Elementarfunktionen und Elementa differentiale.

§ 5. Die Charakterisierungsdivisoren.

§ 6. Die überall endlichen Funktionen.

§ 7. Die überall endlichen Differentiale.

§ 8. Die zu einer gewöhnlichen Stelle gehörigen Elements funktionen.

§ 9. Die zu einer gewöhnlichen Stelle gehörigen Elements differentiale.

§ 10. Die zu einer Stelle $\mathfrak{m}$ bzw. $\breve{\mathfrak{m}}$ gehörigen Elementarfunktion von $(K)$ bzw. $(\breve{K})$.

§ 11. Die zu einer Stelle $\mathfrak{n}$ bzw. $\breve{\mathfrak{n}}$ gehörigen Elementardifferentia von $(\breve{K})$ bzw. $(K)$.

§ 12. Die zu einer Stelle $\mathfrak{n}$ bzw. $\breve{\mathfrak{n}}$ gehörigen Elementarfunktion von $(K)$ bzw. $(\breve{K})$.

§ 13. Die zu einer Stelle $\mathfrak{m}$ bzw. $\breve{\mathfrak{m}}$ gehörigen Elementardifferentia von $(\breve{K})$ bzw. $(K)$.

§ 14. Die zu einer Stelle $\mathfrak{a}$ gehörigen Elementarfunktionen u -differentiale.

§ 15. Die zur unendlich fernen Stelle $\mathfrak{p}_\infty$ gehörigen Elementarfunktionen und -differentiale.
§ 16. Die beiden ersten Elementartheoreme.
I. Abschnitt. Die Elementarfunktion $\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{E^{(1)}}(z, x)$.
§ 17. Definition, Charakterisierung und Herstellung.
§ 18. Die Entwicklung von $E(z, x)\frac{dx}{d\tau}$ in der Umgebung einer gewöhnlichen Stelle.
§ 19. In der Umgebung einer Stelle $\mathfrak{m}$.
§ 20. In der Umgebung einer Stelle $\mathfrak{n}$.
§ 21. In der Umgebung einer Stelle $\mathfrak{a}$.
§ 22. In der Umgebung der Stelle $\mathfrak{p}_\infty$.
§ 23. Das dritte Elementartheorem.
II. Abschnitt. Das Elementardifferential $\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{d\breve{F}^{(1)}}(x, z)$.
§ 24. Definition, Charakterisierung, Herstellung.
§ 25. Die Entwicklung von $d\breve{F}(x, z)$ in der Umgebung einer gewöhnlichen Stelle.
§ 26. In der Umgebung von $\mathfrak{n}$.
§ 27. In der Umgebung von $\mathfrak{m}$.
§ 28. In der Umgebung von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{p}_\infty$.
§ 29. Das vierte Elementartheorem.
V. Schlußwort.

## Einleitung.

„Je mehr ich über die Prinzipien der Funktionentheorie nachdenke — und ich tue dies unablässig —, um so fester wird meine Überzeugung, daß diese auf dem Fundamente algebraischer Wahrheiten aufgebaut werden muß."

Weierstraß, Ges. Math. Werke 2, S. 235 (Berlin 1895).

Diese seine Überzeugung hat Weierstraß selbst in seinen Vorlesungen ber *Abelsche Transzendenten* (Ges. Math. Werke 4, Berlin 1902) in llendeter Weise zur Durchführung gebracht. Hier soll eine Weiterführung r Theorie versucht werden, nämlich von den *Abelschen zu den iemannschen Transzendenten*, welche die ersteren als Spezialfall in ch begreifen (s. § 1). Und zwar soll es sich hier speziell um eine eiterentwicklung desjenigen Teils der Weierstraßschen Vorlesung ndeln, welcher sich auf die Funktion $H(xy, x'y')$, die Grundfunktion r ganzen Theorie, bezieht (2. Kapitel).

Gegenstand der folgenden Untersuchungen ist also eine Klasse ($K$) von Riemannschen Transzendenten nebst ihrer komplementären ($\bar{K}$) (s. § 1).

In einem I. vorbereitenden Abschnitt werden die Grundlagen geschaffen bzw. in Erinnerung gebracht, sofern sie vom Verfasser bereits in früheren Arbeiten entwickelt wurden[1]). Es erweist sich vor allem als nötig, für die Verzweigungsstellen $\mathfrak{a}$ der Klasse Funktionselemente $\overset{a}{y}$ festzulegen (§ 2) und daraufhin den Begriff des Multiplums für Funktionen und Differentiale scharf zu fassen (§ 3) als sinngemäße Verallgemeinerung der Begriffe Nullstelle und Pol bei der Klasse der rationalen Funktionen.

Im II. Abschnitt werden die einfachsten in ($K$) bzw. ($\bar{K}$) vorhandenen Funktionen und Differentiale, die „Elementar-Funktionen und -Differentiale" aufgestellt und vermittelst zweier geeignet gewählter Divisoren $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ bzw. $\bar{\mathfrak{M}}$, $\bar{\mathfrak{N}}$ algebraisch charakterisiert, so zwar, daß die Elementarfunktionen von ($K$) bei $\mathfrak{M}$ feste Unendlichkeitsstellen, bei $\mathfrak{N}$ feste Nullstellen besitzen, die Elementardifferentiale von ($\bar{K}$) gerade umgekehrt (s. das schematische Bild in § 1).

Zu *jeder* Stelle der Ebene gehört eine unbegrenzte Reihe von daselbst unendlich werdenden Elementarfunktionen von ($K$) der „Ordnungen" $1, 2, \ldots, h, \ldots$, wobei indes die Stellen $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{a}, \mathfrak{p}_\infty$ eine besondere Rolle spielen und sich von den anderen „gewöhnlichen" Stellen unterscheiden. Dazu kommen noch als „Elementarfunktionen nullter Ordnung" die evtl. vorhandenen überall endlichen Funktionen, welche ebenfalls in bezug auf $\mathfrak{N}$ algebraisch charakterisiert sind (§ 6). Dasselbe gilt von den Differentialen von ($\bar{K}$) unter Vertauschung von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$. (Satz 1—12).

Bestimmt man die Koeffizienten der bei $\mathfrak{M}$ gelegenen Unendlichkeitsstellen der zu einer beliebigen Stelle $z = c$ gehörigen Elementarfunktionen der Ordnungen $1, 2, \ldots, h, \ldots$ von ($K$), so werden dadurch gerade alle Koeffizienten in der Entwicklung der Elementardifferentiale nullter Ordnung von ($\bar{K}$) an der Stelle $c$ geliefert (I. Elementartheorem). Der analoge Zusammenhang besteht zwischen den Elementardifferentialen der Ordnungen $1, 2, \ldots, h, \ldots$ von ($\bar{K}$) und den Elementarfunktionen nullter Ordnung von ($K$) — (II. Elementartheorem).

Im III. Abschnitt wird — dem Weierstraßschen $H(xy, x'y')$ entsprechend — eine von zwei Variablen $z$, $x$ abhängende analytische Funktion $E^{(1)}_{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}(z, x)$ aufgestellt, welche in bezug auf das Argument $z$ ein

[1]) „Riemannsche Funktionen- und Differentialsysteme in der Ebene", Journal für die reine und angewandte Mathematik **148** (1918), S. 146—182; im folgenden mit I zitiert. „Die Charakterisierung der Riemannschen Transzendenten", Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **26** (1918), S. 252—274; im folgenden mit II zitiert.

ittels $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ charakterisierte Elementarfunktion 1. Ordnung von $(K)$ ist it dem willkürlichen Pol $z = x$ und dem Koeffizienten 1 daselbst. Nach em Vorgang von Weierstraß wird die Entwicklung von $E(z, x)$, nachem es noch mit $\frac{dx}{d\tau}$ multipliziert ist, nach dem Parameter $x$ bzw. $\tau$ für le Stellen der Ebene untersucht (Satz 13—17) und es stellt sich heraus, aß durch die Entwicklungskoeffizienten sämtliche im II. Abschnitt aufstellten, algebraisch charakterisierten Elementarfunktionen von $(K)$ eliefert werden, einschließlich der überall endlichen Funktionen, welche s Koeffizienten der bei $\mathfrak{M}$ gelegenen Pole von $E(z, x)\frac{dx}{d\tau}$ aufscheinen II. Elementartheorem).

Analog wird im IV. Abschnitt ein von zwei Variablen $x$, $z$ abhängendes ifferential $d\overset{(1)}{\underset{\mathfrak{N}.\mathfrak{M}}{F}}(x, z)$ aufgestellt, welches in bezug auf das Argument $x$ n mittels $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$ charakterisiertes Elementardifferential 1. Ordnung von $\breve{K}$) ist mit dem willkürlichen Pol $x = z$ und dem Koeffizienten 1 daselbst.

Es wird wiederum die Entwicklung von $\frac{d\breve{F}}{dx}\frac{dx}{dt}$ nach dem Parameter bzw. $t$ für alle Stellen der Ebene untersucht (Satz 18—22) und es scheint schließlich das Resultat, daß durch die Entwicklungskoeffizienten ämtliche im II. Abschnitt aufgestellten, algebraisch charakterisierten lementardifferentiale von $(\breve{K})$ geliefert werden, einschließlich der überall ndlichen Differentiale, welche als die Koeffizienten der bei $\mathfrak{N}$ gelegenen ole von $d\breve{F}$ auftreten (IV. Elementartheorem).

## I. Abschnitt.

## Vorbereitungen.

### § 1.

### Definition der Riemannschen Transzendenten.

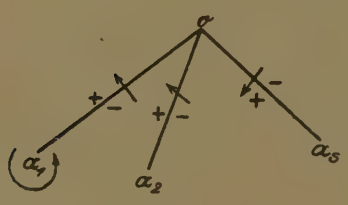
Es seien in der komplexen $z$-Ebene $E$ $s$ Punkte $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_s$ arkiert ($s \geqq 2$); zu jeder Stelle $\mathfrak{a}$ sei eine quadratische Matrix $A = (a_{ik})$ $i, k = 1, 2, \ldots, n$ — mit nicht verschwindender Determinante geeben und

$$A_s A_{s-1} \cdots A_1 = 1.$$ [2])

Von jedem $\mathfrak{a}$ führen wir einen geradlinigen Schnitt ins Unendliche der — was für das Folgende bequemer ist, damit der unendlich ferne

[2]) Ferner sollen nicht alle $A$ in derselben Weise in Produkte von mehreren ubstitutionen $A = \begin{pmatrix} A' & & \\ & A'' & \\ & & A''' \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$ zerlegt werden können. „Nicht zerfallende" Klasse.

Punkt keine ausgezeichnete Rolle spielt — nach einem im Endliche gelegenen Punkt $O$. In der so zerschnittenen Ebene $E'$ sei ein Syste von $n$ analytischen Funktionen $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ definiert durch folgend Eigenschaften:




1. die $y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sind in $I$ eindeutig und haben daselbst den Charakt rationaler Funktionen;

2. die $y_i$ gestatten über die Schnitt in der angedeuteten Richtung eine analy tische Fortsetzung derart, daß

$$y^* = Ay$$

wird für den Schnitt von $\mathfrak{a}$ nach $O$;

3. die $y_i$ verhalten sich in den Punkten $\mathfrak{a}$ „bestimmt" (s. § 2).

Alle Funktionensysteme mit diesen Eigenschaften bilden eine *Klass* $(K)$ *Riemannscher Funktionensysteme*[3]). Zu jeder Klasse $(K)$ gehö eine *komplementäre Klasse* $(\bar{K})$ mit den komplementären Substitutionen $\bar{A}$ $\bar{A}$ ist die konjugierte der zu $A$ reziproken Matrix. Wenn alle $\bar{A} =$ sind, haben wir eine „*sich selbst komplementäre Klasse*" $(K) = (\bar{K})$.

Durch Fortsetzung eines zunächst in $E'$ gegebenen System $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ der Klasse $(K)$ erhält man $n$ oder weniger monogen analytische Funktionen; in dem Fall insbesonders, wo man vermöge de Substitutionen $A$ von jedem $y_i$ zu jedem $y_k$ gelangen kann, *eine* monogen analytische Funktion (*„transitive Klasse"*). Das tritt speziell dann ein wenn sämtliche $A$ Vertauschungssubstitutionen sind, in welchem Fall wi dann eine *algebraische Klasse* vor uns haben.

Der Kürze halber werden wir jedoch im folgenden auch im allgemeine Falle, statt von dem Funktionensystem $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ von „de Funktion $y$" mit ihren $n$ „Zweigen" $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sprechen. Wir denke uns die letzteren passend auf $n$ Exemplaren $E_i'$ der Sternfläche $E'$ aus gebreitet und bezeichnen die Punkte von $E'$ bzw. $E_i'$ mit kleinen deutsche Buchstaben, wobei wir die übereinanderliegenden durch die Indize $1, 2, \ldots, n$ unterscheiden.

Den Funktionen von $(K)$ kommt die *Klasseneigenschaft* zu, d. h. e gehört

1. mit $y^{(1)}$ und $y^{(2)}$ auch $y^{(1)} + y^{(2)}$ zu $(K)$;
2. mit $y$ auch $R(z) \cdot y$ zu $(K)$, wenn $R(z)$ eine rationale Funktion ist
3. mit $y$ auch $\frac{dy}{dz}$ zu $(K)$.

[3]) Wegen der mannigfachen Existenzbeweise vgl. den Artikel von E. Hilb in der Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften 2, B 5, Lineare Differentialgleichungen im komplexen Gebiet, Nr. 14.

Neben den Funktionen $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ von $(K)$ betrachten wir ch ihre *Integrale* bzw. die *Differentiale*

$$dJ = (dJ_1, dJ_2, \ldots, dJ_n) = (y_1 dz, y_2 dz, \ldots, y_n dz).$$

Beide zusammen bilden die *Riemannschen Transzendenten*, welche *Abelschen Transzendenten*, d. i. die algebraischen Funktionen und fferentiale („Abelsche Differentiale"), unter sich begreifen.

Der Fall $n = 2$ umfaßt insbesondere die elliptischen, hyperelliptischen nktionen, sowie die Riemannsche $P$-Funktion.

Für $n = 1$ erhalten wir die Klassen der *„multiplikativen Funktionen"*, nen als speziellste — wenn alle Multiplikatoren gleich 1 sind — die asse der *rationalen Funktionen* angehört.

## § 2.

## Die Verzweigungsstellen.

Wir betrachten jetzt eine Stelle $\mathfrak{a}\,(z = a)$, zu welcher die Sub-tution $A$ gehört. Nach Frobenius[4]) läßt sich auf rein algebraischem ege eine Matrix $L$ mit $|L| \neq 0$ herleiten, wodurch $A$ in die Normalform

$$B = L^{-1} A L$$

ergeführt wird. Wir wollen annehmen, daß $B$ keine mehrgliedrigen etten enthält, also die Gestalt hat

$$B = \begin{pmatrix} e_1 & & & \\ & e_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & e_n \end{pmatrix}.$$

$L$ ist noch innerhalb gewisser Grenzen willkürlich; *wir entscheiden hs ein für allemal für eine bestimmte Wahl von $L$.* Es sind alsdann nach einer bekannten funktionentheoretischen Schlußweise — für die mgebung der Stelle $\mathfrak{a}\ (z = a + t)$ $n$ Funktionselemente

$$\overset{a}{y} = (\overset{a}{y}_1, \ldots, \overset{a}{y}_n) = L^{-1} y$$

finiert, welche nach Voraussetzung 3 (§ 1) die Gestalt haben

$$\overset{a}{y}_i = t^{\alpha_i} P_i(t),$$

obei $P_i(t)$ höchstens endlich viele negative Potenzen enthält. Hierbei ist

$$e^{2i\pi\alpha_1} = e_1, \ \ldots, \ e^{2i\pi\alpha_n} = e_n$$

nd $\alpha = \alpha' + i\alpha''$ so normiert, daß

$$0 \leqq \alpha' < 1;$$

[4]) „Über den Rang einer Matrix", Sitzungsberichte der Königlich Preußischen kademie der Wissenschaften, Mathematisch-physikalische Klasse, II (1911), S. 20—29.

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sind die *reduzierten Exponenten der Klasse* $(K)$ an d Stelle $\mathfrak{a}$;

$$\sum\sum \alpha - n + 1 = p \tag{2}$$

das *Geschlecht der Klasse*, wobei die erste Summation über alle $\alpha$ ei Stelle $\mathfrak{a}$, die zweite über alle $\mathfrak{a}$ zu erstrecken ist;

$$3 = \Pi \begin{cases} \mathfrak{a}_1^{\varepsilon_1} \\ \mathfrak{a}_2^{\varepsilon_2} \\ \cdots \\ \mathfrak{a}_n^{\varepsilon_n} \end{cases} \qquad (\varepsilon_i = 0, 1, \text{ je nachdem } \alpha' = 0, +0 \text{ is} \tag{3}$$

der *Verzweigungsteiler der Klasse*, wobei das Produkt über alle Stellen zu bilden ist.

Nach diesen Festsetzungen gehören zu jeder Stelle [5]) von $E'$ $n$ ei deutig bestimmte Funktionselemente $y$ bzw. $\overset{a}{y}$ mit einer Entwicklu der Form

$$y = P(t) \quad \text{bzw.} \quad \frac{\overset{a}{y}}{t^{\alpha}} = P(t).$$

Dieser Tatsache geben wir Ausdruck, wenn wir im folgenden kurz v „*den Funktionen* $(y, \overset{a}{y})$ *von* $(K)$" sprechen. Ebenso sprechen wir v „*den Differentialen* $(dJ, d\overset{a}{J}) = (ydz, \overset{a}{y}dz)$ *von* $(K)$", welche eine Ent wicklung der Form haben

$$y\frac{dz}{dt} = P(t) \quad \text{bzw.} \quad \frac{\overset{a}{y}}{t^{\alpha}}\frac{dz}{dt} = P(t).$$

Neben der Klasse $(K)$ haben wir auch ihre komplementäre $(\breve{K})$ betrachten, wobei auch — wie z. B. im algebraischen Fall — $(\breve{K}) = (K$ sein kann. Die Funktionen von $(\breve{K})$ bezeichnen wir mit $\breve{y}$. Unter d obigen Voraussetzung über $B$ (§ 2) besitzt auch

$$\breve{B} = \breve{L}^{-1}\breve{A}\breve{L} = \begin{pmatrix} \frac{1}{e_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{e_n} \end{pmatrix}$$

die Normalform und es sind durch

$$\breve{L}^{-1}\breve{y} = \overset{a}{\breve{y}} \tag{4}$$

wieder $n$ zur Stelle $\mathfrak{a}$ gehörige Funktionselemente eindeutig festgelegt m der Entwicklung

$$\overset{a}{\breve{y}} = t^{\breve{\alpha}}P(t).$$

[5]) Insbesondere auch zu einer Randstelle; man hat sich dann $E'$ etwas üb den Rand ausgebuchtet vorzustellen.

ierbei ist

$$e^{2i\pi\breve{\alpha}_1} = \frac{1}{e_1}, \quad \ldots, \quad e^{2i\pi\breve{\alpha}_n} = \frac{1}{e_n}$$

nd $\breve{\alpha} = \breve{\alpha}' + i\breve{\alpha}''$ wieder so normiert, daß

$$0 \leqq \breve{\alpha}' < 1.$$

s folgt

$$\breve{\alpha} = -\alpha + \varepsilon,$$

nd $\breve{\alpha}_1, \ldots, \breve{\alpha}_n$ sind die *reduzierten Exponenten der Klasse* $(\breve{K})$ an der telle $\mathfrak{a}$,

$$\Sigma\Sigma\breve{\alpha} - n + 1 = \breve{p}$$

as *Geschlecht von* $(\breve{K})$, und, da das analog definierte $\breve{\varepsilon} = \varepsilon$ wird,

$$\breve{\mathfrak{Z}} = 3$$

er *Verzweigungsteiler von* $(\breve{K})$.

Die folgenden Untersuchungen erstrecken sich auf die Funktionen $\overset{\mathfrak{a}}{y}$) von $(K)$ und die Funktionen $(\breve{y}, \overset{\mathfrak{a}}{\breve{y}})$ von $(\breve{K})$; ebenso auf die ifferentiale $(dJ, d\overset{\mathfrak{a}}{J})$ von $(K)$ und die Differentiale $(d\breve{J}, d\overset{\mathfrak{a}}{\breve{J}}) = (\breve{y}dz, \overset{\mathfrak{a}}{\breve{y}}dz)$ on $(\breve{K})$.[6])

## § 3.

## Begriff des Multiplums.

Es handelt sich in erster Linie darum, die Begriffe Nullstelle und ol einer analytischen Funktion für die Riemannschen Transzendenten zweckentsprechender Weise zu erweitern. Das geschieht durch folgende efinitionen.

Indem wir unter $\mathfrak{a}$ wieder einen Repräsentanten der Stellen $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_s$ verstehen, unter $\mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots$ hiervon verschiedene Punkte von $E$, ter $\lambda, \varkappa, \mu, \ldots$ beliebige ganze Zahlen, nennen wir das Aggregat von nkten und Exponenten

---

[6]) Es verdient ausdrücklich hervorgehoben zu werden, daß auch im Fall $(\breve{K}) = (K)$ d $\breve{y} = y$ (d. h. $\breve{y}_1 = y_1, \ldots, \breve{y}_n = y_n$) durchaus *nicht* $\overset{\mathfrak{a}}{\breve{y}} = \overset{\mathfrak{a}}{y}$ ist bzw. zu sein braucht n algebraischen Fall z. B. kann bei bestimmter Wahl von $L$ $\overset{\mathfrak{a}}{\breve{y}}_1 = \overset{\mathfrak{a}}{y}_n$, $\overset{\mathfrak{a}}{\breve{y}}_2 = \overset{\mathfrak{a}}{y}_{n-1}$, $\ldots$, $\overset{\mathfrak{a}}{\breve{y}}_n = \overset{\mathfrak{a}}{y}_1$ werden.) Es würde also durchaus nicht genügen, von den Funktionen bzw. $\breve{y}$ von $(K)$ bzw. von $(\breve{K})$ allein zu sprechen und ebenso von den Differentialen: das im folgenden der Kürze halber dennoch geschieht, sind *immer die oben erten, eindeutig festgelegten Funktionselemente gemeint.*

$$\mathfrak{Q} = \begin{Bmatrix} a_1^{\lambda_1} \dots b_1^{\varkappa_1} c_1^{\mu_1} \dots \\ a_2^{\lambda_2} \dots b_2^{\varkappa_2} c_2^{\mu_2} \dots \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_n^{\lambda_n} \dots b_n^{\varkappa_n} c_n^{\mu_n} \dots \end{Bmatrix}$$

kurz einen Divisor, $q = \sum\lambda + \dots + \varkappa + \dots + \mu + \dots$ seine Ordnung;

Die Funktion $(y, \overset{a}{y})$ von $(K)$ heißt ein Multiplum von $\mathfrak{Q}$, wenn f die Funktionselemente mit dem Mittelpunkt $a$ die Entwicklung gilt

$$(6) \quad \begin{cases} \dfrac{\overset{a}{y_i}}{t^{a_i}} = t^{\lambda_i}\mathfrak{P}_i(t) \quad z = a + t \\ \text{bzw. analog} \quad y_i = t^{\varkappa_i}\mathfrak{P}_i(t) \quad z = b + t \quad \text{bzw.} \quad z = \dfrac{1}{t} \text{ für } b = c \\ \text{„} \quad \text{„} \quad y_i = t^{\mu_i}\mathfrak{P}_i(t) \quad z = c + t \quad \text{„} \quad z = \dfrac{1}{t} \text{ für } c = c \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

während für alle anderen Stellen von $E$

$$y_i = \mathfrak{P}_i(t)$$

ist. $\mathfrak{P}(t)$ bedeutet hier und im folgenden wie bei Weierstraß stets ei in einer gewissen Umgebung von $t = 0$ reguläre Potenzreihe. Sind spezi alle Exponenten gleich 0 oder $\mathfrak{Q} = 1$, dann sagen wir, $(y, \overset{a}{y})$ *sei „über endlich“*.

Die analoge Definition gilt für die Funktionen $(\breve{y}, \overset{\breve{a}}{\breve{y}})$ von $(\breve{K})$, wob nur an Stelle von $\alpha$ $\breve{\alpha}$ tritt.

Man sieht, diese Definition ist wesentlich von der Wahl von $L$ a hängig[8]), nur für $n = 1$, wo $L = 1$ ist, wird sie davon unabhängig u geht schließlich für die Klasse der rationalen Funktionen in der Tat die gewöhnliche über.

Ein Differential $(dJ, \overset{a}{dJ})$ von $(K)$ heißt ein Multiplum von $\mathfrak{Q}$ wenn — analog wie oben — die bez. Entwicklungen bestehen:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\overset{a}{y_i}}{t^{a_i}} \dfrac{dz}{dt} = t^{\lambda_i - \varepsilon_i}\mathfrak{P}_i(t) & z = a + t \\ y_i \dfrac{dz}{dt} = t^{\varkappa_i}\mathfrak{P}_i(t) & z = b + t \\ y_i \dfrac{dz}{dt} = t^{\mu_i}\mathfrak{P}_i(t) & z = c + t \\ \dots\dots\dots\dots\dots, & \end{array} \right\} \text{bzw. } z = \frac{1}{t} \text{ für } b \text{ oder } c = c$$

[7]) Mit diesen Aggregaten kann gerechnet werden wie mit gewöhnlichen Zahl

[8]) In I. habe ich gezeigt, wie im algebraischen Fall $L$ gewählt werden mu damit die gewöhnliche Theorie herauskommt.

ährend für alle übrigen Stellen

$$y_i \frac{dz}{dt} = \mathfrak{P}_i(t) \text{ ist.}$$

ühren wir den Begriff des „*Differentialteilers*“ $\mathfrak{W}$ des Klassenpaares $\breve{K}$), $(\breve{K})$ durch die Definition ein

$$\mathfrak{W} = \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{N}_z^{\mathfrak{Z}}}, \qquad \text{wobei} \qquad \mathfrak{N}_z = \begin{cases} \mathfrak{n}_{z1} \\ \mathfrak{n}_{z2} \\ \vdots \\ \mathfrak{n}_{zn} \end{cases}$$

nd mit $\mathfrak{n}_z$ die unendlich ferne Stelle der $z$-Ebene bezeichnet ist, dann t obige Definition identisch mit der folgenden:

Das Differential $(dJ, d\overset{a}{J}) = (ydz, \overset{a}{y}dz)$ von $(K)$ ist Multiplum von $\mathfrak{Q}$, enn die Funktion $(y, \overset{a}{y})$ Multiplum von $\mathfrak{Q} \cdot \mathfrak{W}^{-1}$ ist.

Ist $(dJ, d\overset{a}{J})$ Multiplum von $\mathfrak{Q} = 1$, so heißt es „*überall endlich*“.

Das Analoge gilt für die Differentiale $(d\breve{J}, d\overset{a}{\breve{J}})$ von $(\breve{K})$.

## § 4.

## Sätze.

Nach Aufstellung dieser Grundbegriffe folgt aus der Klasseneigenhaft (§ 1) auf rein arithmetischem Wege eine Reihe von Sätzen, die om Verfasser bereits früher[9]) bewiesen wurden und die, weil sie für das olgende nötig sind, hier ohne Beweis angeführt werden.

1. Satz von der Klassenbasis:

Alle Funktionen der Klasse $(K)$ lassen sich durch eine Basis von rational unabhängigen Funktionen mit rationalen Funktionen als Koeffienten darstellen:

$$y = R_1(z)\,\xi^{(1)} + R_2(z)\,\xi^{(2)} + \ldots + R_n(z)\,\xi^{(n)}.$$

2. Satz von der Idealbasis:

Sämtliche Funktionen von $(K)$, welche Multipla eines Divisors $\mathfrak{Q}$ *n Endlichen* sind (im Unendlichen sich aber beliebig verhalten können), ssen sich stets durch eine Basis mit *ganzen* rationalen Funktionen als oeffizienten darstellen; eine solche Basis $\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \ldots, \zeta^{(n)}$ für „das leal $J(\mathfrak{Q})$“ läßt sich auf algebraischem Wege aus einer Klassenbasis leiten.

[9]) Siehe I.

3. Satz von der Basis für die Multipla eines Divisors:

Sämtliche Funktionen von $(K)$, welche Multipla eines Divisors sind, lassen sich durch eine Basis von linear unabhängigen Funktione mit konstanten Koeffizienten darstellen. Dasselbe gilt für die Differentiale

4. Komplementensatz.

Bildet das System $\zeta^{(h)}$ $(h = 1, 2, \ldots, n)$ der Klasse $(K)$ eine Bas für das Ideal $J(\mathfrak{Q})$, dann bildet das komplementäre System $\breve{\zeta}^{(h)}$ d Klasse $(\breve{K})$ eine Basis für das Ideal $J\left(\frac{1}{\mathfrak{Q}} \cdot \frac{1}{3}\right)$. Hierbei ist, wenn

$$Z = (\zeta_i^{(h)}) \qquad (i, h = 1, 2, \ldots,$$

gesetzt wird,

$$\breve{Z} = (\breve{\zeta}_i^{(h)}) = (\overline{Z^{-1}}),$$

d. h. die konjugierte der reziproken Matrix[10]).

5. Das erste Anzahltheorem.

Ist $\mathfrak{Q}$ ein beliebiger Divisor der Ordnung $q$ und $\mathfrak{Q} \cdot \mathfrak{Q}' = 1$, bedeut ferner $U_{\mathfrak{Q}}$ die Anzahl der linear unabhängigen Funktionen $(y, \overset{a}{y})$ von $(K)$ welche Multipla von $\mathfrak{Q}$ sind, $\breve{V}_{\mathfrak{Q}'}$ die Anzahl der linear unabhängigen Diff rentiale $(d\breve{J}, \overset{a}{d\breve{J}})$ von $(\breve{K})$, welche Multipla von $\mathfrak{Q}'$ sind, so besteht d Gleichung

$$\breve{V}_{\mathfrak{Q}'} = U_{\mathfrak{Q}} + p + q - 1. \tag{8}$$

Sind $\tau, \breve{\tau}$ bzw. $\sigma, \breve{\sigma}$ die Anzahlen der linear unabhängigen, überall en lichen Funktionen bzw. Differentiale von $(K)$. $(\breve{K})$, so folgt speziell

$$\breve{\sigma} = \tau + p - 1.$$

6. Die Residuensätze.

Die Koeffizienten der Unendlichkeitsstellen einer beliebigen Funkti $(f, \overset{a}{f})$ von $(K)$ genügen den $\breve{\sigma}$ Relationen

$$\sum \left[ f_1 \frac{d\breve{\varphi}_1}{dt} + f_2 \frac{d\breve{\varphi}_2}{dt} + \ldots + f_n \frac{d\breve{\varphi}_n}{dt} \right]_{t^{-1}} = 0,$$

wo die Summe über alle die Stellen der Ebene zu erstrecken ist, üb denen Unendlichkeitsstellen von $f$ liegen, und wobei für $d\breve{\varphi}$ nacheinander linear unabhängige, überall endliche Differentiale von $(\breve{K})$ zu nehmen sin

Analog genügen die Koeffizienten der Unendlichkeitsstellen eines b liebigen Differentials $(d\breve{g}, \overset{a}{d\breve{g}})$ von $(\breve{K})$ den $\tau$ Relationen

$$\sum \left[ \frac{d\breve{g}_1}{dt} \cdot \varphi_1 + \frac{d\breve{g}_2}{dt} \varphi_2 + \ldots + \frac{d\breve{g}_n}{dt} \varphi_n \right]_{t^{-1}} = 0,$$

[10]) Von diesem Satz wird nur der Spezialfall $\mathfrak{Q} = 1$ gebraucht.

o die Summe wieder über alle Stellen der Ebene zu erstrecken ist, über enen Unendlichkeitsstellen von $d\bar{g}$ liegen, und für $\varphi$ nacheinander $\tau$ linear abhängige, überall endliche Funktionen von $(K)$ zu nehmen sind.

(Der Beweis beider Sätze folgt unmittelbar aus der Bemerkung, daß e in der eckigen Klammer stehenden Ausdrücke *rationale* Differentiale nd.)

7. Vorbereitungssatz der algebraischen Charakterisierung für Funktionen nd Differentiale.

Sind $\tau$, $\breve{\sigma}$ obige Anzahlen, dann läßt sich (auf unendlich viele Arten) n Divisor $\mathfrak{N}$ *der Ordnung* $\tau$ bzw. ein Divisor $\mathfrak{M}$ *der Ordnung* $\breve{\sigma}$ an-eben von der Art, daß keine überall endliche Funktion von $(K)$ bzw. ein überall endliches Differential von $(\breve{K})$ existiert, welches an den Stellen on $\mathfrak{N}$ bzw. von $\mathfrak{M}$ verschwindet.

## II. Abschnitt.

## Aufstellung der Elementarfunktionen und Elementardifferentiale.

### § 5.

### Die Charakterisierungsdivisoren.

Sei

$$\mathfrak{M} = \begin{Bmatrix} \mathfrak{m}_{11}^0 & \mathfrak{m}_{21}^0 & \dots & \mathfrak{m}_{\tau 1}^0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathfrak{m}_{1\mu_1}^1 & \mathfrak{m}_{2\mu_2}^1 & \dots & \mathfrak{m}_{\breve{\sigma}\mu_\tau}^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathfrak{m}_{1n}^0 & \mathfrak{m}_{2n}^0 & \dots & \mathfrak{m}_{\tau n}^0 \end{Bmatrix} = \prod_1^{\breve{\sigma}} \begin{Bmatrix} \mathfrak{m}_1^0 \\ \vdots \\ \mathfrak{m}_\mu^1 \\ \vdots \\ \mathfrak{m}_n^0 \end{Bmatrix}$$

n Divisor von der im letzten Satz verlangten Eigenschaft, derart also, aß kein Differential von $(\breve{K})$ existiert, welches Multiplum von $\mathfrak{M}$ ist, ann lehrt

Hilfssatz 1. *Es existiert — außer den evtl. vorhandenen überall ndlichen Funktionen von* $(K)$ *— keine Funktion von* $(K)$, *welche ultiplum von* $\mathfrak{M}^{-1}$ *ist.*

Zum Beweise brauchen wir nur in dem ersten Anzahltheorem $\mathfrak{Q} = \mathfrak{M}^{-1}$ $= -\breve{}$ zu nehmen, wobei dann wegen $\breve{V}_{\mathfrak{M}} = 0$

$$U_{\mathfrak{M}^{-1}} = \breve{\sigma} - p + 1 = \tau$$

ird. Außer den $\tau$ linear unabhängigen überall endlichen Funktionen on $(K)$, welche natürlich Multipla von $\mathfrak{M}^{-1}$ sind, gibt es also kein eiteres l. u. Multiplum.

Hat

$$\breve{\mathfrak{M}} = \prod_{1}^{\sigma} \begin{Bmatrix} \breve{\mathfrak{m}}_1^0 \\ \vdots \\ \breve{\mathfrak{m}}_{j'}^1 \\ \vdots \\ \breve{\mathfrak{m}}_n^0 \end{Bmatrix}$$

dieselbe Bedeutung für die Differentiale von $(K)$, dann behauptet Hilfssatz 1a das Analoge für die Funktionen von $(\breve{K})$.

Sei zweitens

$$(10) \qquad \mathfrak{N} = \begin{Bmatrix} \mathfrak{n}_{11}^0 & \mathfrak{n}_{21}^0 & \dots & \mathfrak{n}_{\tau 1}^0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathfrak{n}_{1\nu_1}^1 & \mathfrak{n}_{2\nu_2}^1 & \dots & \mathfrak{n}_{\tau\nu_\tau}^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathfrak{n}_{1n}^0 & \mathfrak{n}_{2n}^0 & \dots & \mathfrak{n}_{\tau n}^0 \end{Bmatrix} = \prod_{1}^{\tau} \begin{Bmatrix} \mathfrak{n}_1^0 \\ \vdots \\ \mathfrak{n}_\nu^1 \\ \vdots \\ \mathfrak{n}_n^0 \end{Bmatrix}$$

ein Divisor von der Eigenschaft (nach dem letzten Satz), daß kein Funktion von $(K)$ existiert, welche Multiplum von $\mathfrak{N}$ ist, dann behaupte

Hilfssatz 2. *Es existiert — außer den evtl. vorhandenen übera endlichen Differentialen von* $(\breve{K})$ *— kein Differential von* $(\breve{K})$, *welch Multiplum von* $\mathfrak{N}^{-1}$ *ist.*

Der Beweis folgt analog, wenn wir in dem Anzahltheorem $\mathfrak{Q} = \mathfrak{N}$ $q = \tau$ wählen, womit $U_{\mathfrak{N}} = 0$, $\breve{V}_{\mathfrak{N}^{-1}} = \breve{\sigma}$ wird.

Hat schließlich

$$\breve{\mathfrak{N}} = \prod_{1}^{\breve{\tau}} \begin{Bmatrix} \breve{\mathfrak{n}}_1^0 \\ \vdots \\ \breve{\mathfrak{n}}_{\breve{\nu}} \\ \vdots \\ \breve{\mathfrak{n}}_n \end{Bmatrix}$$

dieselbe Bedeutung für die Funktionen von $(\breve{K})$, so behauptet Hilfssatz 2 dasselbe über die Differentiale von $(K)$.

Sämtliche Punkte $\{\mathfrak{m}\}$, $\{\breve{\mathfrak{m}}\}$, $\{\mathfrak{n}\}$, $\{\mathfrak{n}\}$ können und wollen wir al voneinander verschieden und als endlich, dem Innern von $E'$ angehörig voraussetzen. Ist eine oder mehrere der Zahlen $\tau$, $\breve{\tau}$, $\sigma$, $\breve{\sigma}$ gleich Null, s kommen bzw. $\mathfrak{N}$, $\breve{\mathfrak{N}}$, $\mathfrak{M}$, $\breve{\mathfrak{M}}$ sowie alle folgenden darauf bezüglichen Sätz in Fortfall.

Die hiermit aufgestellten Divisoren bilden die *Grundlage für di algebraische Charakterisierung der Funktionen und Differentiale.* Wi stellen sie nochmals schematisch zusammen:

| | Klasse $(K)$ | | Klasse $(\breve{K})$ | |
|---|---|---|---|---|
| Funktionen: | $\overbrace{\times\times\ldots\times}^{\mathfrak{M}:\breve{\sigma}}$ | $\overbrace{OO\ldots O}^{\mathfrak{N}:\tau}$ | $\overbrace{\times\times\ldots\times}^{\breve{\mathfrak{M}}:\sigma}$ | $\overbrace{OO\ldots O}^{\breve{\mathfrak{N}}:\breve{\tau}}$ |
| Differentiale: | $\overbrace{\times\times\ldots\times}^{\breve{\mathfrak{N}}:\breve{\tau}}$ | $\overbrace{OO\ldots O}^{\breve{\mathfrak{M}}:\sigma}$ | $\overbrace{\times\times\ldots\times}^{\mathfrak{N}:\tau}$ | $\overbrace{OO\ldots O}^{\mathfrak{M}:\breve{\sigma}}$ |

Zusammenfassend können wir die beiden Hilfssätze jetzt so formu-eren:

Hilfssatz 3. *Eine Funktion* $(y, \overset{a}{y})$ *von* $(K)$, *welche Multiplum on* $\mathfrak{M}^{-1}\cdot\mathfrak{N}$ *ist, verschwindet identisch; ein Differential* $(d\breve{J}, d\overset{a}{\breve{J}})$ *von on* $(\breve{K})$, *welches Multiplum von* $\mathfrak{N}^{-1}\cdot\mathfrak{M}$ *ist, verschwindet identisch.*

Für die Funktionen von $(K)$ unterscheiden wir „gewöhnliche" und besondere" Stellen der Ebene; letztere umfassen sämtliche Punkte $\{\mathfrak{m}\}$ nd $\{\mathfrak{n}\}$ einerseits, sämtliche Stellen $\{\mathfrak{a}\}$ sowie den unendlich fernen unkt $\mathfrak{p}_\infty$ andererseits. Analog für die Differentiale und die Klasse $(\breve{K})$.

## § 6.

## Die überall endlichen Funktionen von $(K)$ und $(\breve{K})$.

Sind $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \ldots, \varphi^{(\tau)}$ — allgemein $(\varphi, \overset{a}{\varphi})$ — $\tau$ l. u. überall endliche unktionen von $(K)$ und bilden wir mittels unbestimmter Koeffizienten as lineare Aggregat

$$\Phi = C_1\varphi^{(1)} + \ldots + C_\tau\varphi^{(\tau)},$$

o haben die inhomogenen Gleichungen

$$\Phi(\mathfrak{n}_{1\nu_1}) = 1,\ \Phi(\mathfrak{n}_{2\nu_2}) = 0, \ldots, \Phi(\mathfrak{n}_{\tau\nu_\tau}) = 0 \tag{11}$$

tets eine und nur eine nicht identisch verschwindende Lösung, da die omogenen keine besitzen; das mit diesem Lösungssystem gebildete ggregat nennen wir $\underset{\mathfrak{N}}{\varphi}^{(\mathfrak{n}_1)}$; analog erhalten wir $\underset{\mathfrak{N}}{\varphi}^{(\mathfrak{n}_2)}, \ldots, \underset{\mathfrak{N}}{\varphi}^{(\mathfrak{n}_\tau)}$ — allgemein $\underset{\mathfrak{N}}{\varphi}^{(\mathfrak{m})}$. Wie sofort zu sehen, ist $\underset{\mathfrak{N}}{\varphi}^{(\mathfrak{n}_1)}$ durch die Gleichungen (11) auch harakterisiert und sind sämtliche $\underset{\mathfrak{N}}{\varphi}^{(\mathfrak{m})}$ linear unabhängig. Wir haben also

Satz 1. *Es gibt* $\tau$ *überall endliche, linear unabhängige, in bezug uf* $\mathfrak{N}$ *algebraisch charakterisierte Funktionen der Klasse* $(K)$: $\underset{\mathfrak{N}}{\varphi}^{(\mathfrak{n}_1)}, \ldots, \underset{\mathfrak{N}}{\varphi}^{(\mathfrak{n}_\tau)}$; $^{(\mathfrak{m})}(z)$ hat folgende Entwicklung:

1. an einer gewöhnlichen Stelle $\mathfrak{z}_0$ $(z = z_0 + t)$

$$\varphi_i^{(\mathfrak{m})} = \mathfrak{P}_i(t),$$

2. an einer Stelle $\mathfrak{m}$ $(z = m + t)$; ebenso
3. bei $\mathfrak{n}$; bei der $\{\mathfrak{n}\}$ angehörenden, von $\mathfrak{n}$ verschiedenen Stelle $\mathfrak{n}'$

$$(12)\qquad \begin{cases} \varphi_1^{(n)} = c_{10} + c_{11}t + \ldots; \quad \varphi_1^{(n)} = c_{10} + c_{11}t + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_\nu^{(n)} = 1 + c_{\nu 1}t + \ldots; \quad \varphi_{\nu'}^{(n)} = 0 + c_{\nu' 1}t + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n^{(n)} = c_{n0} + c_{n1}t + \ldots; \quad \varphi_n^{(n)} = c_{n0} + c_{n1}t + \ldots, \end{cases}$$

4. bei $\mathfrak{a}$ $(z = a + t)$

$$(13)\qquad \frac{\overset{a}{\varphi}{}_i^{(n)}}{t^{\alpha_i}} = \mathfrak{P}_i(t),$$

5. bei $\mathfrak{p}_\infty$ $\left(z = \frac{1}{t}\right)$

$$\varphi_i^{(n)} = \mathfrak{P}_i(t).$$

Satz 1a besagt die Existenz von $\bar{\tau}$ analogen Funktionen $\underset{\mathfrak{R}}{\bar{\varphi}^{(n)}}(z)$ d Klasse $(\breve{K})$.

## § 7.

### Die überall endlichen Differentiale von $(K)$ und $(\breve{K})$.

Ausgehend von irgendwelchen $\bar{\sigma}$ l. u. Differentialen $(d\bar{\psi}, d\overset{a}{\bar{\psi}})$ d Klasse $(\breve{K})$ und dem Divisor $\mathfrak{M}$ kommt man auf analogem Wege wie i § 6 zu

Satz 2. *Es gibt $\sigma$ überall endliche, linear unabhängige, in bezu auf $\mathfrak{M}$ algebraisch charakterisierte Differentiale der Klasse $(\breve{K})$* $d\underset{\mathfrak{R}}{\bar{\psi}}^{(m_1)}, \ldots, d\underset{\mathfrak{R}}{\bar{\psi}}^{(m)\bar{\tau}}$; $d\underset{\mathfrak{R}}{\bar{\psi}}^{(m)}$ hat folgende Entwicklung:

1. an einer gewöhnlichen Stelle $\mathfrak{z}_0$ $(z = z_0 + t)$

$$\frac{d\bar{\psi}_i^{(m)}}{dt} = \mathfrak{P}_i(t),$$

2. an einer Stelle $\mathfrak{n}$ ebenso,
3. bei $\mathfrak{m}$ bzw. bei der $\{\mathfrak{m}\}$ angehörenden, von $\mathfrak{m}$ verschiedenen Stelle $\mathfrak{n}$

$$(14)\qquad \begin{cases} \frac{d\bar{\psi}_1^{(m)}}{dt} = c_{10} + c_{11}t + \ldots; \quad \frac{d\bar{\psi}_1^{(m)}}{dt} = c_{10} + c_{11}t + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{d\bar{\psi}_\mu^{(m)}}{dt} = 1 + c_{\mu 1}t + \ldots; \quad \frac{d\bar{\psi}_{\mu'}^{(m)}}{dt} = 0 + c_{\mu' 1}t + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{d\bar{\psi}_n^{(m)}}{dt} = c_{n0} + c_{n1}t + \ldots; \quad \frac{d\bar{\psi}_n^{(m)}}{dt} = c_{n0} + c_{n1}t + \ldots, \end{cases}$$

4. bei $\mathfrak{a}$ $(z = a + t)$:

$$(15)\qquad \frac{1}{t^{\bar{\alpha}_i}} \frac{d\overset{a}{\bar{\psi}}_i^{(m)}}{dt} = \frac{1}{t^{\alpha_i}} \mathfrak{P}_i(t),$$

5. bei $\mathfrak{p}_\infty$ $\left(z = \frac{1}{t}\right)$

$$\frac{d\,\overset{\mathfrak{m}}{\psi}_i^{(\mathfrak{m})}}{dt} = \mathfrak{P}_i(t).$$

Satz 2a besagt die Existenz von $\sigma$ analogen Differentialen $d\,\overset{\mathfrak{M}}{\psi}^{(\mathfrak{m})}$ r Klasse $(K)$.

## § 8.

## Die zu einer gewöhnlichen Stelle gehörigen Elementarfunktionen.

Wir wenden uns jetzt zur Aufstellung von Elementarfunktionen für e Klasse $(K)$, welche — kurz gesprochen — bei $\mathfrak{M}$ (höchstens) von der sten Ordnung unendlich, bei $\mathfrak{N}$ (mindestens) von der ersten Ordnung ıll und bei einer Stelle $\mathfrak{x}_{0k}$ von beliebiger Ordnung unendlich werden. abei muß $\mathfrak{x}_0$ der Reihe nach gleich einer gewöhnlichen Stelle bzw. eich $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{a}, \mathfrak{p}_\infty$ genommen werden, um wirklich Elementarfunktionen r *alle* Stellen der Ebene zu erhalten.

Sei zunächst $\mathfrak{x}_0$ $(z = x_0)$ eine gewöhnliche Stelle für die Funktionen n $(K)$, $\mathfrak{x}_{0k}$ — $k = 1, 2, \ldots, n$ — die $n$ daselbst übereinander liegenden ellen in den $n$ Blättern $E_k'$. Dann besteht

Satz 3. *Es gibt $n$ zur Stelle $\mathfrak{x}_0$ gehörige, in bezug auf $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ alge-aisch charakterisierte Elementarfunktionen der Ordnung $h$ von $(K)$:* $\mathfrak{E}_{\mathfrak{N}}^{(h)}(z; \mathfrak{x}_{0k})$ $(k = 1, 2, \ldots n;\ h = 1, 2, 3, \ldots)$, *die folgende Entwicklung sitzen:*

1. bei einer gewöhnlichen Stelle $\neq \mathfrak{x}_0$:

$$\mathfrak{E}_i^{(h)}(z_t; \mathfrak{x}_{0k}) = \mathfrak{P}_i(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

2. bei $\mathfrak{x}_0$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{E}_1^{(h)}(\overset{0}{z}_t; \mathfrak{x}_{0k}) &= 0 + \mathfrak{P}_1(t)\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\mathfrak{E}_k^{(h)} &= \frac{1}{t^h} + \mathfrak{P}_k(t)\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\mathfrak{E}_n^{(h)} &= 0 + \mathfrak{P}_n(t),
\end{aligned}$$

3. bei $\mathfrak{m}$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{E}_1^{(h)}(\overset{m}{z}_t; \mathfrak{x}_{0k}) &= 0 + \mathfrak{P}_1(t)\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\mathfrak{E}_\mu^{(h)} &= \frac{C_{\mathfrak{x}_{0k},\mathfrak{m}}^{(h)}}{t} + \mathfrak{P}_\mu(t)\\
&\cdots\cdots\cdots\\
\mathfrak{E}_n^{(h)} &= 0 + \mathfrak{P}_n(t),
\end{aligned}$$

4. bei $\mathfrak{n}$:

$$\mathfrak{E}_i^{(h)}(\overset{n}{z}_t; \mathfrak{x}_{0k}) = \mathfrak{P}_i(t); \qquad \mathfrak{P}_\nu(0) = 0,$$

5. bei $\mathfrak{a}$:

$$\frac{1}{t^{a_i}}\mathfrak{E}_i^{(h)}(z_t^{a};\, \mathfrak{x}_{0k}) = \mathfrak{P}_i(t),$$

6. bei $\mathfrak{p}_\infty$:

$$\mathfrak{E}_i^{(h)}(z_t^{\infty};\, \mathfrak{x}_{0k}) = \mathfrak{P}_i(t),$$

und es ist

$$\boxed{C^{(h)}_{\mathfrak{x}_{0k},\,\mathfrak{m}} = -\left[\frac{d\,\breve{\psi}_k^{(\mathfrak{m})}(\mathfrak{x}_t)}{dt}\right]_{t^{h-1}}}.$$

Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion. Um die Richtigk für $h=1$ zu beweisen, wählen wir in dem Anzahltheorem

$$\mathfrak{Q}' = \mathfrak{M}\begin{Bmatrix}\mathfrak{x}^0_{01}\\ \vdots\\ \mathfrak{x}^1_{0k}\\ \vdots\\ \mathfrak{x}^0_{0n}\end{Bmatrix} \qquad (\mathfrak{Q}=(\mathfrak{Q}')^{-1};\ q=-\breve{\sigma}-1$$

womit wegen $\breve{V}_{\mathfrak{Q}'}=0$ folgt

$$U_{\mathfrak{Q}} = \tau + 1.$$

Außer den $\tau$ l. u. überall endlichen Funktionen gibt es also noch e l. u. Multiplum von $\mathfrak{Q}$, dessen Entwicklung bei $\mathfrak{x}_{0k}$ wirklich mit $\frac{C}{t}(C+$ beginnen muß; sonst wäre es ja ebenfalls überall endlich, also nicht l. von den ersteren $\tau$ Funktionen. Durch Multiplikation mit einer Ko stanten können wir erreichen, daß $C=1$ wird und durch Hinzufügu eines linearen Aggregates $\sum_{\mathfrak{N}} c_{\mathfrak{n}}\varphi^{(\mathfrak{n})}(z)$, daß an den Stellen von $\mathfrak{N}$ d nullten Potenzen in der Entwicklung fehlen. Dann haben wir eine Funkti mit der hingeschriebenen Entwicklung für $h=1$; sie ist aber auch d durch charakterisiert, denn die Differenz zweier derartiger Funktion müßte nach Hilfssatz 3 identisch verschwinden. Der noch zu vollziehen Schluß von $h$ auf $h+1$ beruht auf derselben Überlegung, da bei Übergang von

$$\mathfrak{Q}_h^{-1} = \mathfrak{M}\begin{Bmatrix}\mathfrak{x}^0_{01}\\ \vdots\\ \mathfrak{x}^h_{0k}\\ \vdots\\ \mathfrak{x}^0_{0n}\end{Bmatrix} \quad \text{zu} \quad \mathfrak{Q}_{h+1}^{-1} = \mathfrak{M}\begin{Bmatrix}\mathfrak{x}^0_{01}\\ \vdots\\ \mathfrak{x}^{h+1}_{0k}\\ \vdots\\ \mathfrak{x}^0_{0n}\end{Bmatrix}$$

$U_{\mathfrak{Q}_{h+1}} = U_{\mathfrak{Q}_h}+1$ wird; überdies können in der Entwicklung bei $\mathfrak{x}_{0k}$ d Koeffizienten der $(-1)$-ten, …, $(-h)$-ten Potenz durch Subtraktion v Elementarfunktionen der Ordnungen $1, 2, \ldots, h$ zum Verschwinden g bracht werden.

Nehmen wir in dem Residuensatz

$$f = \underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}^{(h)}}(z; \mathfrak{x}_{0k}), \qquad d\breve{\psi} = d\underset{\mathfrak{N}}{\breve{\psi}^{(\mathfrak{m})}}(z),$$

ist unter Beachtung von (5) und der Gleichheit

5) $$\sum_{i=1}^{n} f_i \frac{d\breve{\psi}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \overset{a}{f}_i \frac{d\overset{a}{\breve{\psi}}_i}{dt} = \sum_i t^{\alpha_i+\bar{\alpha}_i} \cdot \frac{1}{t^{\alpha_i}} \overset{a}{f}_i \cdot \frac{1}{t^{\bar{\alpha}_i}} \frac{d\overset{a}{\breve{\psi}}_i}{dt}$$

$$= \sum_i t^{\varepsilon_i} \cdot \mathfrak{P}_i(t) \cdot \frac{1}{t^{\varepsilon_i}} \mathfrak{P}_i(t)$$

r Beitrag zur Summe $\sum \Big[\quad\Big]_{t^{-1}}$

n der Stelle $\mathfrak{x}_0$ gleich: $1 \cdot \left[\frac{d\breve{\psi}_k^{(\mathfrak{m})}(\overset{0}{z}_i)}{dt}\right]_{t^{h-1}}$

„ „ $\mathfrak{m}$ „ $C^{(h)}_{\mathfrak{x}_{0k},\mathfrak{m}} \cdot 1$

„ „ $\mathfrak{m}'(+\mathfrak{m})$ $C^{(h)}_{\mathfrak{x}_{0k},\mathfrak{m}'} \cdot 0$

n allen übrigen Stellen gleich null, so daß in der Tat die angegebene stalt von $C$ folgt.

Satz 3a besagt die Existenz der analogen Elementarfunktionen $\underset{\breve{\mathfrak{N}}}{\breve{\mathfrak{F}}^{(h)}}(x; \mathfrak{z}_{0i})$ für die Klasse $(\breve{K})$.

## § 9.

## Die zu einer gewöhnlichen Stelle gehörigen Elementardifferentiale.

Bei der Aufstellung der Elementardifferentiale für die Klasse $(\breve{K})$ ollen wir — des Folgenden wegen — die unabhängige Variable mit $x$, e Stelle, wo Pole beliebiger Ordnung entstehen sollen, mit $\mathfrak{z}_0$ bzw. $_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ bezeichnen (wie schon in Satz 3a geschehen) und der Reihe nach gleich einer gewöhnlichen Stelle, $\mathfrak{n}, \mathfrak{m}, \mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{p}_\infty$ hmen.

Satz 4. *Es gibt $n$ zur Stelle $\mathfrak{z}_0$ gehörige, in bezug auf $\mathfrak{N}, \mathfrak{M}$ algebraisch charakterisierte Elementardifferentiale der Ordnung $h$ von $(K)$:* $\underset{\breve{\mathfrak{N}}}{\breve{\mathfrak{F}}_k^{(h)}}(x; \mathfrak{z}_{0i})$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ h = 1, 2, 3, \ldots)$, *die folgende Entwicklung sitzen:*

1. bei einer gewöhnlichen Stelle $+\mathfrak{z}_0$:

$$\frac{d\breve{\mathfrak{F}}_k^{(h)}(x_\tau; \mathfrak{z}_{0i})}{d\tau} = \mathfrak{P}_k(\tau) \qquad (k = 1, 2, \ldots n);$$

2. bei $\mathfrak{z}_0$:

$$\frac{d\breve{\mathfrak{F}}_1^{(h)}(\overset{0}{x}_\tau; \mathfrak{z}_{0i})}{d\tau} = 0 + \mathfrak{P}_1(\tau),$$

. . . . . .

$$\frac{d\overset{\circ}{\mathfrak{F}}_i^{(h)}}{d\tau} = \frac{1}{\tau^h} + \mathfrak{P}_i(\tau),$$

. . . . . .

$$\frac{d\overset{\circ}{\mathfrak{F}}_m^{(h)}}{d\tau} = 0 + \mathfrak{P}_m(\tau);$$

3. bei $\mathfrak{n}$:

$$\frac{d\overset{\circ}{\mathfrak{F}}_1^{(h)}(\overset{\mathfrak{n}}{x}_\tau; \mathfrak{z}_{0i})}{d\tau} = 0 + \mathfrak{P}_1(\tau),$$

. . . . . .

$$\frac{d\overset{\circ}{\mathfrak{F}}_\nu^{(h)}}{d\tau} = \frac{\overset{\circ}{D}{}_{\mathfrak{z}_{0i},\nu}^{(h)}}{\tau} + \mathfrak{P}_\nu(\tau),$$

. . . . . .

$$\frac{d\overset{\circ}{\mathfrak{F}}_n^{(h)}}{d\tau} = 0 + \mathfrak{P}_n(\tau);$$

4. bei $\mathfrak{m}$:

$$\frac{d\overset{\circ}{\mathfrak{F}}_k^{(h)}(\overset{\mathfrak{m}}{x}_\tau; \mathfrak{z}_{0i})}{d\tau} = \mathfrak{P}_k(\tau) \qquad (\mathfrak{P}_\mu(0) = 0$$

5. bei $\mathfrak{a}$:

$$\frac{1}{\tau^{\overset{\circ}{\alpha}_k}} \frac{d\overset{\mathfrak{a}}{\mathfrak{F}}_k^{(h)}(\overset{\mathfrak{a}}{x}_\tau; \mathfrak{z}_{0i})}{d\tau} = \frac{1}{\tau^{\varepsilon_k}} \mathfrak{P}_k(\tau);$$

6. bei $\mathfrak{p}_\infty$

$$\frac{d\overset{\circ}{\mathfrak{F}}_k^{(h)}(\overset{\infty}{x}_\tau; \mathfrak{z}_{0i})}{d\tau} = \mathfrak{P}_k(\tau)$$

und es ist

$$\boxed{\overset{\circ}{D}{}_{\mathfrak{z}_{0i},\nu}^{(h)} = -\left[\underset{\mathfrak{R}}{\varphi_i^{(\mathfrak{m})}}(\overset{\circ}{x}_\tau)\right]_{\tau^{h-1}}}.$$

Der Beweis ist völlig analog wie im vorhergehenden Paragraphen zu führe

Satz 4a besagt die Existenz der entsprechenden Elementardifferentia $d\underset{\overset{\circ}{\mathfrak{R}}, \overset{\circ}{\mathfrak{M}}}{\mathfrak{E}}^{(h)}(z, \mathfrak{x}_{0k})$ für die Klasse $(K)$.

## § 10.

## Die zu einer Stelle $\mathfrak{m}$ bzw. $\overset{\circ}{\mathfrak{m}}$ gehörigen Elementarfunktionen von $(K)$ bzw. $(\overset{\circ}{K})$.

Wir lassen jetzt $\mathfrak{x}_0$ mit einer beliebigen von den Stellen $\mathfrak{m}$ $\mathfrak{m}_2, \ldots, \mathfrak{m}_{\overline{\nu}}$ — kurz $\mathfrak{m}$ genannt — zusammenfallen; solange in $\mathfrak{x}_{0k} = \mathfrak{r}$ $k \neq \mu$ ist, bleiben alle Schlüsse von § 8 ungeändert. Ist hingegen $k =$ und wählen wir wieder zunächst für $h = 1$

$$\mathfrak{Q}' = \mathfrak{M}\begin{cases} \mathfrak{m}_1^0 \\ \vdots \\ \mathfrak{m}_\mu^1, \\ \vdots \\ \mathfrak{m}_n^0 \end{cases}$$

folgt aus dem Anzahltheorem (§ 4) die Existenz einer Funktion, welche i $\mathfrak{m}_\mu$ eine Entwicklung der Form hat

$$\frac{c_{-2}}{t^2} + \frac{c_{-1}}{t} + \mathfrak{P}(t) \quad \text{mit} \quad c_{-2} \neq 0.$$

$_2$ kann wieder gleich 1 gemacht, aber die $(-1)$-te Potenz jetzt nicht m Verschwinden gebracht werden, ebenso bei allen Funktionen höherer rdnung für $h = 2, 3 \ldots$ Indem alles übrige unverändert wie in § 8 seine ültigkeit behält, sprechen wir

Satz 5 aus: *Es gibt $n$ zur Stelle $\mathfrak{m}$ gehörige, in bezug auf $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ gebraisch charakterisierte Elementarfunktionen der Ordnung $h$ von* $\zeta$): $\mathfrak{E}^{(h)}(z; \mathfrak{m}_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n;\ h = 1, 2, \ldots)$. *Die Entwicklung von* $\mathfrak{E}^{(h)}_{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}(z; \mathfrak{m}_k)$ *lautet für eine gewöhnliche Stelle, ebenso bei* $\mathfrak{m}' \neq \mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{a}, \mathfrak{N}$ *analog wie in* § 8; *bei* $\mathfrak{m}$ *hingegen*

1. für $k = \mu$:

$$\mathfrak{E}_1^{(h)}(z; \mathfrak{m}_\mu) = 0 + 0 + \mathfrak{P}_1(t),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathfrak{E}_\mu^{(h)} = \frac{1}{t^{h+1}} + \frac{C^{(h)}_{\mathfrak{m}_\mu, \mathfrak{m}}}{t} + \mathfrak{P}_\mu(t),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathfrak{E}_n^{(h)} = 0 + 0 + \mathfrak{P}_n(t);$$

2. für $k \neq \mu$:

$$\mathfrak{E}_1^{(h)}(z; \mathfrak{m}_k) = 0 + 0 + \mathfrak{P}_1(t),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathfrak{E}_k^{(h)} = \frac{1}{t^h} + 0 + \mathfrak{P}_k(t),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathfrak{E}_\mu^{(h)} = 0 + \frac{C^{(h)}_{\mathfrak{m}_k, \mathfrak{m}}}{t} + \mathfrak{P}_\mu(t),$$ [11])
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathfrak{E}_n^{(h)} = 0 + 0 + \mathfrak{P}_n(t),$$

d es ist für jedes $\mathfrak{m}''$ aus der Reihe $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \ldots \mathfrak{m}_{\bar{\mu}}$

[11]) Für $k > \mu$ vertauschen beide Reihen ihren Platz.

1. für $k = \mu$:

$$C^{(k)}_{\mathfrak{m}_\mu, \mathfrak{m}''} = -\left[\frac{d\overset{\mathfrak{m}}{\mathfrak{P}}{}^{(\mathfrak{m}'')}_{t^\mu}(\overset{\mathfrak{m}}{x}_t)}{dt}\right]_{t^k},$$

2. für $k \neq \mu$:

$$C^{(k)}_{\mathfrak{m}_k, \mathfrak{m}''} = -\left[\frac{d\overset{\mathfrak{m}}{\mathfrak{P}}{}^{(\mathfrak{m}'')}_{t^k}(\overset{\mathfrak{m}}{x}_t)}{dt}\right]_{t^{k-1}}.$$

Satz 5a besagt die Existenz der analogen Elementarfunktion $\overset{(k)}{\mathfrak{E}}_{\overset{\mathfrak{m}}{\mathfrak{R}}, \overset{\mathfrak{n}}{\mathfrak{R}}}(x; \overset{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}}_i)$ für die Klasse $(\overset{\mathfrak{m}}{K})$.

## § 11.

## Die zu einer Stelle $\mathfrak{n}$ bzw. $\overset{\mathfrak{n}}{\mathfrak{n}}$ gehörigen Elementardifferentiale von $(\overset{\mathfrak{m}}{K})$ bzw. $(K)$.

Dasselbe Verhalten, das sich bei den Funktionen von $K$ im vorhergehenden Paragraphen einstellte, wenn wir $\mathfrak{x}_0$ mit $\mathfrak{n}$ zusammenfallen ließen, tritt bei dem Differentialen von $(\overset{\mathfrak{m}}{K})$ auf, wenn wir $\mathfrak{z}_0$ gleich einer beliebigen von den Stellen $\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \ldots, \mathfrak{n}_\tau$, kurz $\mathfrak{n}$, wählen. Wir geben gleich den

Satz 6. *Es gibt $n$ zur Stelle $\mathfrak{n}$ gehörige, in bezug auf $\mathfrak{N}$, algebraisch charakterisierte Elementardifferentiale der Ordnung $\mathfrak{N}$ von* $(\overset{\mathfrak{m}}{K})$: $d\overset{(k)}{\underset{\mathfrak{N}, \mathfrak{M}}{\mathfrak{F}}}x; \mathfrak{n}_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ k = 1, 2, \ldots)$. *Die Entwicklung von* $d\overset{(k)}{\underset{\mathfrak{N}, \mathfrak{M}}{\mathfrak{F}}}(x; \mathfrak{n}_i)$ *lautet für eine gewöhnliche Stelle, ebenso für* $\mathfrak{n}' \neq \mathfrak{n}, \mathfrak{m}, \mathfrak{a}, \ldots$ analog wie in § 9; bei $\mathfrak{n}$ hingegen

1. für $i = \nu$:

$$\frac{d\overset{(k)}{\mathfrak{F}_1}(\overset{\mathfrak{n}}{x}; \mathfrak{n}_\nu)}{d\tau} = 0 + 0 + \mathfrak{P}_1(\tau),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d\overset{(k)}{\mathfrak{F}_\nu}}{d\tau} = \frac{1}{\tau^{k+1}} + \frac{\overset{(k)}{D}_{\mathfrak{n}_\nu, \mathfrak{n}}}{\tau} + \mathfrak{P}_\nu(\tau),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d\overset{(k)}{\mathfrak{F}_n}}{d\tau} = 0 + 0 + \mathfrak{P}_n(\tau);$$

2. für $i \neq \nu$:

$$\frac{d\overset{(k)}{\mathfrak{F}_1}(\overset{\mathfrak{n}}{x}; \mathfrak{n}_i)}{d\tau} = 0 + 0 + \mathfrak{P}_1(\tau),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d\breve{\mathfrak{F}}_1^{(h)}}{d\tau} = \frac{1}{\tau^h} + 0 + \mathfrak{P}_1(\tau),$$

. . . . . .

$$\frac{d\breve{\mathfrak{F}}_\nu^{(h)}}{d\tau} = 0 + \frac{\breve{D}_{\mathfrak{n}_\nu,\mathfrak{n}}^{(h)}}{\tau} + \mathfrak{P}_\nu(\tau),$$

. . . . . .

$$\frac{d\breve{\mathfrak{F}}_n^{(h)}}{d\tau} = 0 + 0 + \mathfrak{P}_n(\tau),$$

d es ist für jedes $\mathfrak{n}''$ aus der Reihe $\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \ldots, \mathfrak{n}_\tau$:

1. für $i = \nu$:

$$\boxed{\breve{D}_{\mathfrak{n}_\nu,\mathfrak{n}''}^{(h)} = -\left[\underset{\mathfrak{R}}{\varphi_\nu^{(\mathfrak{n}'')}}(\overset{\mathfrak{n}}{x_\tau})\right]_{\tau^h}},$$

2. für $i \neq \nu$:

$$\boxed{\breve{D}_{\mathfrak{n}_i,\mathfrak{n}''}^{(h)} = -\left[\underset{\mathfrak{R}}{\varphi_i^{(\mathfrak{n}'')}}(\overset{\mathfrak{n}}{x_\tau})\right]_{\tau^{h-1}}}.$$

Satz 6a lehrt die Existenz der entsprechenden Elementardifferentiale $\underset{\breve{\mathfrak{R}}}{\breve{\mathfrak{F}}^{(h)}}(z;\breve{\mathfrak{n}}_k)$ für $(\breve{K})$.

## § 12.

## Die zu einer Stelle $\mathfrak{n}$ bzw. $\breve{\mathfrak{n}}$ gehörigen Elementarfunktionen von $(K)$ bzw. $(\breve{K})$.

Lassen wir $\mathfrak{x}_0$ mit einer Stelle $\mathfrak{n}$ zusammenfallen, so ändert sich gen § 8 nur das Bild der Entwicklung an der Stelle $\mathfrak{n}$, was wir in m Satz niederlegen:

Satz 7. *Es gibt $n$ zur Stelle $\mathfrak{n}$ gehörige, in bezug auf $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ gebraisch charakterisierte Elementarfunktionen der Ordnung $h$ von* ): $\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}^{(h)}}(z;\mathfrak{n}_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n;\ h = 1, 2, \ldots)$. *Die Entwicklung von* $\underset{\mathfrak{R}}{\mathfrak{F}^{(h)}}(z;\mathfrak{n}_k)$ *lautet für eine gewöhnliche Stelle, ebenso für* $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}' \neq \mathfrak{n}, \mathfrak{a}$, *analog wie in* § 8, *hingegen bei* $\mathfrak{n}$:

$$\mathfrak{E}_1^{(h)}(\overset{\mathfrak{n}}{z_t};\mathfrak{n}_k) = 0 + \mathfrak{P}_1(t),$$

. . . . . .

$$\mathfrak{E}_k^{(h)} = \frac{1}{t^h} + \mathfrak{P}_k(t), \quad \text{wobei } \mathfrak{P}_\nu(0) = 0 \text{ ist.}$$

. . . . . .

$$\mathfrak{E}_n^{(h)} = 0 + \mathfrak{P}_n(t).$$

Ebenso hat man

$$C^{(h)}_{n_k,\mathfrak{m}} = -\left[\frac{d\,\overset{\mathfrak{M}}{\overline{\psi}}{}^{(\mathfrak{m})}_{k}(z_t^n)}{dt}\right]_{t^{h-1}}.$$

Satz 7a gibt die entsprechenden $\underset{\overline{\mathfrak{M}}.\overline{\mathfrak{N}}}{\overline{\mathfrak{E}}}{}^{(h)}(x;\overline{\mathfrak{n}}_i)$ für $(\overline{K})$.

## § 13.

## Die zu einer Stelle $\mathfrak{m}$ bzw. $\overline{\mathfrak{m}}$ gehörigen Elementardifferentiale von $(\overline{K})$ bzw. $(K)$.

Fällt $\mathfrak{d}_0$ mit einer Stelle $\mathfrak{m}$ zusammen, so entsteht für die Differentia von $(\overline{K})$ dieselbe Änderung gegen § 9, wie im vorhergehenden Falle f die Funktionen gegen § 8. Es wird genügen, den Satz auszusprech

Satz 8. *Es gibt n zur Stelle* $\mathfrak{m}$ *gehörige, in bezug auf* $\mathfrak{N}$, *algebraisch charakterisierte Elementardifferentiale der Ordnung h v* $(\overline{K})$: $d\underset{\mathfrak{N}.\mathfrak{M}}{\overline{\mathfrak{F}}}{}^{(h)}(x;\mathfrak{m}_i)$ $(i=1,2,\ldots,n;\ h=1,2,\ldots)$. *Die Entwicklung lau für eine gewöhnliche Stelle, ebenso bei* $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{m}' \neq \mathfrak{m}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{p}_\infty$ *analog wie* § 9. *hingegen bei* $\mathfrak{m}$:

$$\frac{d\overline{\mathfrak{F}}{}^{(h)}_1(\overset{\mathfrak{m}}{x};\mathfrak{m}_i)}{d\tau} = 0 + \mathfrak{P}_1(\tau).$$

. . . . . .

$$\frac{d\overline{\mathfrak{F}}{}^{(h)}_i}{d\tau} = \frac{1}{\tau^h} + \mathfrak{P}_i(\tau), \quad \text{wobei} \quad \mathfrak{P}_{\mu}(0) = 0 \text{ is}$$

. . . . . .

$$\frac{d\overline{\mathfrak{F}}{}^{(h)}_n}{d\tau} = 0 + \mathfrak{P}_n(\tau).$$

Ferner ist

$$\overline{D}^{(h)}_{\mathfrak{m}_i,\mathfrak{n}} = -\left[\underset{\mathfrak{N}}{\varphi}{}^{(\mathfrak{n})}_i(\overset{\mathfrak{m}}{x_\tau})\right]_{\tau^{h-1}}.$$

Analog Satz 8a über $d\underset{\overline{\mathfrak{N}}.\overline{\mathfrak{M}}}{\overline{\mathfrak{F}}}{}^{(h)}(z;\overline{\mathfrak{m}}_k)$ für $(K)$.

## § 14.

## Die zu einer Stelle $\mathfrak{a}$ gehörigen Elementarfunktionen und -differentia

Auch für den Fall, daß $x_0$ mit einer Stelle $\mathfrak{a}$ zusammenfällt, bleib die Schlüsse des § 8 bestehen.

Satz 9. *Es gibt n zur Stelle* $\mathfrak{a}$ *gehörige, in bezug auf* $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ *alg braisch charakterisierte Elementarfunktionen der Ordnung h von* $(K)$

$^{\nu)}(z; \mathfrak{a}_k)$ $(h = 1, 2, \ldots, n;\ h = 1, 2, \ldots)$. *Die Entwicklung lautet für gewöhnliche Stelle, ebenso für* $\mathfrak{m}, \mathfrak{n}, \mathfrak{a}, \mathfrak{p}_\infty$ *analog wie in* § 8, *hingegen für* $\mathfrak{a}$:

$$\frac{1}{t^{\alpha_1}}\overset{a}{\mathfrak{E}}{}_1^{(h)}(\overset{a}{z}_t; \mathfrak{a}_k) = 0 + \mathfrak{P}_1(t),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{t^{\alpha_k}}\overset{a}{\mathfrak{E}}{}_k^{(h)} \qquad = \frac{1}{t^h} + \mathfrak{P}_k(t),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{t^{\alpha_n}}\overset{a}{\mathfrak{E}}{}_n^{(h)} \qquad = 0 + \mathfrak{P}_n(t),$$

es ist

$$C^{(h)}_{\mathfrak{a}_k, \mathfrak{m}} = -\left[t^{\varepsilon_k}\cdot\frac{1}{t^{\breve{\alpha}_k}}\,\frac{d\,\overset{a}{\breve{\psi}}{}_k^{(\mathfrak{m})}(\overset{a}{z}_t)}{\mathfrak{M}\qquad dt}\right]_{t^{h-1}} = -\left[\mathfrak{P}_k(t)\right]_{t^{h-1}}.$$

letztere folgt aus dem 1. Residuensatz unter Beachtung von (15) und ). $C$ ist der $(h-1)$-te Entwicklungskoeffizient in der Potenzreihe ) rechts für $i = k$.

Satz 9a gibt die entsprechenden $\underset{\mathfrak{N},\,\breve{\mathfrak{N}}}{\breve{\mathfrak{E}}^{(h)}}(x; \mathfrak{a}_i)$ von $(\breve{K})$. Auch für die ı gehörigen Elementardifferentiale ist es nur nötig, ihre Entwicklung a näher anzugeben.

Satz 10. *Es gibt n zur Stelle* $\mathfrak{a}$ *gehörige, in bezug auf* $\mathfrak{N}, \mathfrak{M}$ *braisch charakterisierte Elementardifferentiale der Ordnung h von* : $d\underset{\mathfrak{N},\,\mathfrak{M}}{\breve{\mathfrak{F}}^{(h)}}(x; \mathfrak{a}_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ h = 1, 2, \ldots)$. — *Die Entwicklung et für eine gewöhnliche Stelle, ebenso für* $\mathfrak{n}, \mathfrak{m}, \mathfrak{p}_\infty$ *analog wie in für* $\mathfrak{a}$ *hingegen*

$$\frac{1}{\tau^{\breve{\alpha}_1}}\,\frac{d\,\overset{\mathfrak{a}}{\breve{\mathfrak{F}}}{}_1^{(h)}(\overset{a}{x}_\tau; \mathfrak{a}_t)}{d\tau} = \frac{1}{\tau^{\varepsilon_1}}\left(0 + \mathfrak{P}_1(\tau)\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{\tau^{\breve{\alpha}_t}}\,\frac{d\,\overset{\mathfrak{a}}{\breve{\mathfrak{F}}}{}_i^{(h)}}{d\tau} \qquad = \frac{1}{\tau^{\varepsilon_t}}\left(\frac{1}{\tau^h} + \mathfrak{P}_i(\tau)\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{1}{\tau^{\breve{\alpha}_n}}\,\frac{d\,\overset{a}{\breve{\mathfrak{F}}}{}_n^{(h)}}{d\tau} \qquad = \frac{1}{\tau^{\varepsilon_n}}\left(0 + \mathfrak{P}_n(\tau)\right),$$

*und es ist*

$$\breve{D}^{(h)}_{\mathfrak{a}_i,\,\mathfrak{n}} = -\left[\frac{1}{\tau^{a_i}}\,\varphi^{(\mathfrak{n})}_{i\,\mathfrak{N}}\left(\overset{a}{x}_\tau\right)\right]_{\tau^{h-1}}.$$

Satz 10a gibt die entsprechenden $d\,\underset{\mathfrak{N}.\,\mathfrak{M}}{\mathfrak{F}}^{(h)}(z;\mathfrak{a}_k)$ für $(K)$.

## § 15.

## Die zur unendlich fernen Stelle $\mathfrak{p}_\infty$ gehörigen Elementarfunktione und Differentiale.

Auf die letzte der besonderen Stellen, $\mathfrak{p}_\infty$, beziehen sich schließl die beiden *Sätze* 11 *und* 12 (bzw. 11a und 12a), welche die Exist der $n$ zu $\mathfrak{p}_\infty$ gehörigen, in bezug auf $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ algebraisch charakterisier Elementarfunktionen der Ordnung $h$ von $(K)$: $\underset{\mathfrak{M},\,\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}}^{(h)}(z;\mathfrak{p}_{\infty\,k})$ und ebe der in bezug auf $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$ algebraisch charakterisierten Elementardifferenti der Ordnung $h$ von $(\breve{K})$: $d\,\underset{\mathfrak{N}.\,\mathfrak{M}}{\breve{\mathfrak{F}}}^{(h)}(x;\mathfrak{p}_{\infty\,i})$ besagen. Ihre Formulierung ble dem Leser überlassen.

## § 16.

## Die beiden ersten Elementartheoreme.

Die über die Koeffizienten $C$ bzw. $D$ gefundenen Resultate fassen in den beiden Theoremen zusammen:

I. Elementartheorem. *Die Koeffizienten*[12]) *der n Potenzreih welche die n Zweige der in bezug auf* $\mathfrak{N}$ *algebraisch charakterisier Elementarfunktionen nullter Ordnung* $(\varphi^{(\mathfrak{n})}_{\mathfrak{N}}, \overset{a}{\varphi}{}^{(\mathfrak{n})}_{\mathfrak{N}})$ *von* $(K)$ *in der Umgebu einer beliebigen Stelle* $\mathfrak{c}$ *darstellen, werden geliefert durch die Koeffizien der Unendlichkeitsstelle* $\mathfrak{n}$ *der n zu* $\mathfrak{c}$ *gehörigen, in bezug auf* $\mathfrak{N}$, *algebraisch charakterisierten Elementardifferentiale von* $(\breve{K})$ *der O nungen* 1, 2, 3, ....

II. Elementartheorem. *Die Koeffizienten der n Potenzreih welche die n Zweige des in bezug auf* $\mathfrak{M}$ *algebraisch charakterisier Elementardifferentials nullter Ordnung* $(\breve{\psi}^{(\mathfrak{m})}_{\mathfrak{M}}, d\overset{a}{\breve{\psi}}{}^{(\mathfrak{m})}_{\mathfrak{M}})$ *von* $(\breve{K})$ *in der U gebung einer beliebigen Stelle* $\mathfrak{c}$ *darstellen, werden geliefert durch Koeffizienten der Unendlichkeitsstelle* $\mathfrak{m}$ *der n zu* $\mathfrak{c}$ *gehörigen in bez auf* $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ *algebraisch charakterisierten Elementarfunktionen von* $(K)$ Ordnungen 1 2, 3, ....

[12]) Soweit sie nicht schon durch die Normierung (gleich 0 oder 1) gegeben s

Sämtliche Elementarfunktionen und Differentiale, deren Existenz aus
n Anzahltheorem erschlossen wurde, können auf Grund des Satzes 3
4) auf algebraischem Wege hergestellt werden. Mit ihrer Hilfe kann
e Funktion und *jedes* Differential von $(K)$ bzw. $(\breve{K})$ dargestellt werden.
*atz von der Partialbruchzerlegung*)[13]).

## III. Abschnitt.

## Die Elementarfunktion $E^{(1)}_{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}(z, x)$.

### § 17.

### Definition, Charakterisierung und Herstellung[14]).

Bis jetzt hatten wir es ausschließlich mit Funktionen *einer* Variablen
tun. Wir definieren nunmehr ein quadratisches System analytischer
nktionen zweier in $E'$ veränderlicher Größen $z, x$, die wir als „Argu-
nt" und „Parameter" unterscheiden:

$$(E_{ik}(z, x)) = \begin{pmatrix} E_{11}(z,x) & E_{12}(z,x) & \dots & E_{1n}(z,x) \\ E_{21}(z,x) & \dots & \dots & \dots \\ E_{n1}(z,x) & \dots & \dots & E_{nn}(z,x) \end{pmatrix} \qquad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

rch folgende Eigenschaften:

Bei festem $k$ und $x$ ist $E_{ik}(z.x)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ eine Funktion
Klasse $(K)$, bei festem $i$ und $z$ ist $E_{ik}(z, x)$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ eine
nktion von $(\breve{K})$; weiterhin als Funktion des Arguments $z$ betrachtet,
bei festem $\bar{k}$ und $\bar{x}$ — wobei $\bar{x}$ jede beliebige gewöhnliche Stelle sein
n — $E_{i\bar{k}}(z, \bar{x})$[15]) Multiplum von $\mathfrak{M}^{-1}.\mathfrak{N}$, abgesehen von der Stelle
$= \bar{x}$, wo die Entwicklung statthat

$$\begin{cases} E_{i\bar{k}}(z_t, \bar{x}) = \mathfrak{P}_i(t) & \text{für } i \neq \bar{k} \\ \qquad\quad = \dfrac{1}{t} + \mathfrak{P}_{\bar{k}}(t) & \text{für } i = \bar{k} \end{cases} \qquad (t = z - \bar{x}).$$

rch diese Eigenschaften ist $E_{ik}$ *charakterisiert*[16]); denn wäre $E^*_{ik}$ ein
eites derartiges System, so wäre

$$E^*_{i\bar{k}}(z, \bar{x}) - E_{i\bar{k}}(z, \bar{x})$$

[13]) Siehe II, § 7, wo auch die Umkehrung, die Existenz von Funktionen und
erentialen bei gegebenen, den Bedingungen der Residuensätze (§ 4) genügenden
auptteilen" dargetan ist. Siehe Weierstraß, a. a. O. S. 87 ff.

[14]) Siehe Weierstraß, a. a. O. 2. Kapitel.

[15]) Für $z = a$ ist natürlich wieder $\overset{a}{E}_{i\bar{k}}(z, \bar{x}) = L^{-1} E_{i\bar{k}}(z, \bar{x})$ festgelegt; der
ze halber unterlassen wir das hinzuschreiben.

[16]) Siehe Weierstraß, a. a. O. S. 187—188.

ein Multiplum der Klasse $(K)$ von $\mathfrak{M}^{-1}.\mathfrak{N}$ und daher identisch Nu
d. h. für $i = 1, 2, \ldots, n$.

Da das für jede beliebige gewöhnliche Stelle $\bar{x}$ statthat, folgt

$$E^*_{ik}(z, x) - E_{ik}(z, x) \equiv 0,$$

q. e. d.

Nachdem die *Eindeutigkeit* nachgewiesen ist, erbringen wir d
*Existenznachweis* durch direkte Aufstellung. Wir gehen dabei aus v
der Funktion

$$(19) \qquad \vartheta_{ik}(z, x) = \frac{\zeta_i^{(1)}(z)\,\breve{\zeta}_k^{(1)}(x) + \ldots + \zeta_i^{(n)}(z)\,\breve{\zeta}_k^{(n)}(x)}{z - x},$$

wo $\zeta^{(1)}(z) \ldots \zeta^{(n)}(z)$ ein Fundamentalsystem der Klasse $(K)$ für d
Ideal $J(1)$, $\breve{\zeta}^{(1)}(x) \ldots \breve{\zeta}^{(n)}(x)$ das hierzu komplementäre System i
Die $\breve{\zeta}$ gehören der Klasse $(\breve{K})$ an und es ist für jedes $z = x$

$$(20) \qquad \sum \zeta_i^{(1)} \breve{\zeta}_k^{(1)} = \sum^{a} \zeta_i^{(1)} \breve{\zeta}_k^{(1)} = \delta_{ik} \qquad \begin{matrix} \delta_{ik} = 0 & \text{für} & i \neq \\ = 1 & \text{für} & i = \end{matrix}$$

Daher hat $\vartheta_{ik}(z, x)$ als Funktion von $z$ an der Stelle $z = \bar{x}$ bereits d
geforderte Verhalten (18). Falls in der Entwicklung bei $z = \mathfrak{p}_\infty$ negati
Potenzen von $t = \frac{1}{z}$ vorkommen — die Koeffizienten sind dann Funktion
$\bar{f}(x)$ von $(\breve{K})$ —, bringen wir diese zum Fortfall durch Subtraktion ein
Ausdruckes der Form

$$(21) \quad \eta_{ik}(z, x) = \breve{f}_k^{(\lambda_i)}(x) \cdot \underset{\mathfrak{M}.\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(\lambda_i)}}(z; \mathfrak{p}_{\infty i}) + \ldots + \breve{f}_k^{(1)}(x) \cdot \underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}_i^{(1)}}(z; \mathfrak{p}_{\infty i}).$$

Schließlich können wir noch ein lineares Aggregat der überall endlich
Funktionen von $(K)$ zufügen und die Koeffizienten so bestimmen, d
der so entstandene Ausdruck bei $\mathfrak{N}$ verschwindet. Es ist für eine Stelle

$$(22) \qquad \vartheta^*_{\nu,k}(\mathfrak{n}, x) \equiv \vartheta_{\nu,k}(\mathfrak{n}, x) - \eta_{\nu,k}(\mathfrak{n}, x) = \vartheta_{\nu,k}(\mathfrak{n}, x);$$

sofern $\vartheta_{\nu,k}(\mathfrak{n}, x)$ als Funktion von $x$ der Klasse $(\breve{K})$ angehört, bezeichn
wir es auch mit $\bar{\vartheta}_{\nu,k}(\mathfrak{n}, x)$.

Setzen wir schließlich

$$(23) \qquad \underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{E^{(1)}_{ik}}(z, x) = \vartheta_{ik}(z, x) - \eta_{ik}(z, x) - \sum_{\{\mathfrak{n}\}}{}' \bar{\vartheta}_{\nu,k}(\mathfrak{n}, x) \cdot \underset{\mathfrak{N}}{\varphi^{(\mathfrak{n})}}(z),$$

so besitzt dieses Funktionensystem alle geforderten Eigenschaften. D
beiden letzten Glieder sind — ebenso wie die Zähler des ersten — ei
Summe von Produkten aus je einer Funktion der Klasse $(K)$ und $(\breve{K}$
Der Kürze halber sprechen wir von „der in bezug auf $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ algebrais

arakterisierten Elementarfunktion 1. Ordnung der Klasse $(K)$ mit dem gument $z$ und dem Parameter $x$" und bezeichnen sie kurz mit $E(z, x)$.

## § 18.

## Die Entwicklung von $E(z, x)\frac{dx}{d\tau}$ in der Umgebung einer gewöhnlichen Stelle.

Es handelt sich im folgenden darum, das Verhalten von $E(z, x)$ als nktion der beiden Variablen $z, x$ zu erforschen.

Es sei zunächst $\mathfrak{x}_0$ eine gewöhnliche Stelle, $\overset{0}{x}_\tau = \mathfrak{x}_0 + \tau$, dann können r das als Funktion von $x$ der Klasse $(\breve{K})$ angehörende Differential $(z, \overset{0}{x}_\tau)\frac{d\overset{0}{x}_\tau}{d\tau}$ in der Umgebung von $\tau = 0$ nach Potenzen von $\tau$ entwickeln, obei jedenfalls nur endlich viele negative Potenzen von $\tau$ auftreten können:

$$E_{ik}(z, \overset{0}{x}_\tau)\frac{d\overset{0}{x}_\tau}{d\tau} = \sum_{(\gamma)} A_{\gamma i}(z; \mathfrak{x}_{0k})\tau^\gamma.\ ^{17})$$

e Koeffizienten $A_{\gamma i}$ sind Funktionen von $(K)$; es liegt uns daran, ihre atur näher zu erforschen.

Wir betrachten dazu:

1. eine gewöhnliche, von $\mathfrak{x}_0$ verschiedene Stelle $\mathfrak{z}$, $z_t = \mathfrak{z} + t$.

Hier ist

$$E_{ik}(z_t, \overset{0}{x}_\tau)\frac{d\overset{0}{x}_\tau}{d\tau} = \mathfrak{P}_{ik}(t, \tau)$$

d hierin kommen keine negativen Potenzen von $t$ vor, da für $t = 0$ nach Definition regulär ist. Also ist

$$A_{\gamma i}(z_t, \mathfrak{x}_{0k}) = [P_{ik}(t, \tau)]_{\tau\gamma} = \mathfrak{P}_{ik}(t).$$

2. Sei $\overset{m}{z}_t = \mathfrak{m} + t$,

nn kann in

$$E_{ik}(\overset{m}{z}_t, \overset{0}{x}_\tau)\frac{d\overset{0}{x}_\tau}{d\tau} = P_{ik}(t, \tau)$$

r $i = \mu$ die $(-1)$-te Potenz von $t$ auftreten und daher auch in $A_{\gamma\mu}$.

3. Sei $z$ ein Element mit dem Mittelpunkt $\mathfrak{n}$: $\overset{n}{z}_t = \mathfrak{n} + t$.

nn kommen in

$$E_{ik}(\overset{n}{z}_t, \overset{0}{x}_\tau)\frac{d\overset{0}{x}_\tau}{d\tau} = P_{ik}(t, \tau)$$

---

[17]) $k$ ist hier und im folgenden beliebig, aber fest gewählt zu denken; $i$ geht n 1 bis $n$.

ebenfalls keine negativen Potenzen von $t$ vor und es fehlt in

$$A_{\gamma i}(\overset{n}{z}_t; \mathfrak{x}_{0k}) = [P_{ik}(t,\tau)]_{\tau^\nu} = \mathfrak{P}_{ik}(t)$$

für $i = \nu$ die erste Potenz von $t$, da $E_r(z, x)$ für $z = \infty$ identisch in verschwindet.

4. Für $\overset{a}{z}_t = a + t$

ist analog

$$\frac{1}{t^{a_i}} \overset{a,-}{E}_{ik}(\overset{a}{z}_t, \overset{0}{x}_\tau)\frac{d\overset{0}{x}_\tau}{d\tau} = \sum \frac{\overset{a}{A}_{\gamma i}(\overset{a}{z}_t; \mathfrak{x}_{0k})}{t^{a_i}} \cdot \tau^\nu = P_{ik}(t,\tau)$$

und

$$\frac{1}{t^{a_i}} \overset{a}{A}_{\gamma i} = [P_{ik}(t,\tau)]_{\tau^\nu} = \mathfrak{P}_{ik}(t)$$

Hierbei setzen wir

$$(24)\quad \begin{cases} \overset{a,-}{E}(z,x) = \dfrac{\Sigma \overset{a}{\zeta}^{(1)} \overset{a}{\xi}^{(1)}}{z-x} + \ldots, \\ \overset{-,a}{E}(z,x) = \dfrac{\Sigma \zeta^{(1)} \overset{a}{\xi}^{(1)}}{z-x} + \ldots, \\ \overset{a,a}{E}(z,x) = \dfrac{\Sigma \overset{a}{\zeta}^{(1)} \overset{a}{\xi}^{(1)}}{z-x} + \ldots, \end{cases}$$

wobei in den folgenden Formen derselbe Übergang von $f$ zu $\overset{a}{f}$ bzw. $\breve{f}$ zu zu machen ist.

5. Auch für $\overset{\infty}{z}_t = \frac{1}{t}$ kommen in der Entwicklung

$$E_{ik}(\overset{\infty}{z}_t, \overset{0}{x}_\tau)\frac{d\overset{0}{x}_\tau}{d\tau} = P_{ik}(t,\tau)$$

keine negativen Potenzen von $t$ vor, daher auch nicht in

$$A_{\gamma i}(\overset{\infty}{z}_t; \mathfrak{x}_{0k}) = [P_{ik}(t,\tau)]_{\tau^\nu} = \mathfrak{P}_{ik}(t).$$

6. Es bleibt noch der Fall zu untersuchen, daß $z_t, x_\tau$ beide dasselb Element mit dem Mittelpunkt $\mathfrak{x}_0$ darstellen[18]). Für $i = k$ wird der Zähl von $\vartheta(z, x)$ gleich 1, folglich wird

$$E_{kk}(\overset{0}{z}_t, \overset{0}{x}_\tau)\frac{d\overset{0}{x}_\tau}{d\tau} - \frac{1}{t-\tau}$$

nicht mehr unendlich für $t = \tau$. Setzt man, was jetzt möglich ist, dies Differenz gleich $P_{kk}(t,\tau)$, so kommen darin keine negativen Potenze

[18]) Das Folgende stützt sich auf den — ganz elementar einzusehenden — Hilf satz: Ist $\mathfrak{P}(t,\tau) = 0$ für $t = \tau$, so ist $\mathfrak{P}(t,\tau)$ durch $t-\tau$ teilbar.

$t$ vor. Denn für $t = 0$ und beliebiges, dem absoluten Betrage nach reichend kleines $\tau (\neq 0)$ ist

$$E_{kk} \frac{d\overset{0}{x}_\tau}{d\tau}_{t=0} = -\frac{1}{\tau} + P_{kk}(0, \tau)$$

chaus regulär. Also lautet schließlich die Entwicklung nach steigenden enzen von $\tau$

$$_k(\overset{0}{z}_t, \overset{0}{x}_\tau) \frac{d\overset{0}{x}_\tau}{d\tau} = \frac{1}{t-\tau} + P(t, \tau) = \frac{1}{t} + \frac{\tau}{t^2} + \frac{\tau^2}{t^3} + \ldots + \sum_{(\gamma)} [P(t, \tau)]_{\tau\gamma} \cdot \tau^\gamma,$$

l es ist daher für $\gamma = -\beta$ $(\beta = 1, 2, \ldots)$

$$A_{-\beta k}(\overset{0}{z}_t; \mathfrak{x}_{0k}) = [P(t, \tau)]_{\tau, -\beta} = \mathfrak{P}(t),$$

$\gamma \geqq 0$

$$A_{\gamma k}(\overset{0}{z}_t; \mathfrak{x}_{0k}) = \frac{1}{t^{\gamma+1}} + \mathfrak{P}(t).$$

r $i \neq k$ ist aber der Zähler von $\vartheta(\overset{0}{z}_t, \overset{0}{x}_\tau) = \frac{1}{t^0 \tau^\beta} \mathfrak{P}(t, \tau)$ gleich Null $t = \tau$ und daher

$$E_{ik}(\overset{0}{z}_t, \overset{0}{x}_\tau) \frac{d\overset{0}{x}_\tau}{d\tau} = \frac{1}{t^0 \tau^\beta} \mathfrak{P}(t, \tau) + \overline{P}(t, \tau) = P(t, \tau),$$

rin aus demselben Grunde wie oben keine negativen Potenzen von $t$ kommen, daher auch nicht in $A_{\gamma i}$ für $i \neq k$.[19])

Zusammenfassend haben wir also:

$A_{-\beta i}(z, \mathfrak{x}_{0k})$ ist Multiplum von $\mathfrak{M}^{-1} \cdot \mathfrak{N}$ und daher identisch Null[20]).

$A_{\gamma i}(z, \mathfrak{x}_{0k})$ zeigt (für $\gamma \geqq 0$) das charakteristische Verhalten der Funknen in § 8, und es ist daher[21])

$$A_{\gamma i}(z, \mathfrak{x}_{0k}) = \underset{\mathfrak{M}, \mathfrak{N}}{\mathfrak{E}^{(\gamma+1)}}(z; \mathfrak{x}_{0k}).$$

Satz 13. *Es ist*

$$\boxed{E_k(z, \overset{0}{x}_\tau) \frac{d\overset{n}{x}_\tau}{dt} = \sum_{\gamma=0}^{\infty} \underset{\mathfrak{M}, \mathfrak{N}}{\mathfrak{E}^{(\gamma+1)}}(z; \mathfrak{x}_{0k}) \cdot \tau^\gamma}.$$

Zusatz. *Speziell für $\tau = 0$ wird*

$$\boxed{\underset{\mathfrak{M}, \mathfrak{N}}{E_k^{(1)}}(z; \mathfrak{x}_0) = \underset{\mathfrak{M}, \mathfrak{N}}{\mathfrak{E}^{(1)}}(z; \mathfrak{x}_{0k})}.$$

---

[19]) Unter Benutzung des Komplementensatzes (§ 4) wußten wir von vornherein, auch keine negativen Potenzen von $\tau$ vorkommen, also $\beta = 0$ ist.

[20]) Dabei wäre das ebenfalls von vornherein klar.

[21]) Der Einfachheit halber lassen wir hier und bei den analogen Gleichungen folgenden den von 1 bis $n$ laufenden Index $i$ fort.

## § 19.

**Die Entwicklung von $E(z, x)\frac{dx}{d\tau}$ in der Umgebung einer Stelle**

Ist $\overset{m}{x}_\tau = \mathfrak{m} + \tau$ ein Element mit dem Mittelpunkt $\mathfrak{m}$, so können zunächst setzen

$$E_{ik}(z, \overset{m}{x}_\tau)\frac{d\overset{m}{x}_\tau}{d\tau} = \sum_{(\gamma)} A_{\gamma i}(z; \mathfrak{m}_k)\tau^\gamma,$$

wobei es sich jetzt wieder um die Erforschung der $(K)$ angehörigen Fu tionen $A_\gamma$ handelt. Wir können uns darauf beschränken, daß $z_t$ ein E ment mit demselben Mittelpunkt $\mathfrak{m}$ darstellt, da für alle anderen Fä das Resultat genau dasselbe wie im vorhergehenden Paragraphen $k$ denken wir fest, haben aber jetzt zu unterscheiden, ob $k = \mu$ o $k \neq \mu$ ist.

1. $k = \mu$.

Für $i \neq \mu$ wird wie oben

$$E_{i\mu}(\overset{m}{z}_t, \overset{m}{x}_\tau)\frac{d\overset{m}{x}_\tau}{d\tau} = P(t, \tau),$$

und rechts kommen keine negativen Potenzen von $t$ vor; daher ist regulär. Dagegen für $i = \mu$ wird

$$E_{\mu\mu}(\overset{m}{z}_\tau, \overset{m}{x}_\tau)\frac{d\overset{m}{x}_\tau}{d\tau} = \frac{1}{t-\tau} + P(t, \tau),$$

und hierin tritt in $P(t, \tau)$ die $(-1)$-te Potenz von $t$ auf, da für $t =$ (und beliebiges $\tau$) $E_{\mu k}$ einen Pol 1. Ordnung hat. Entwickelt man na steigenden Potenzen von $\tau$, so folgen also Entwicklungen der Gestalt

$$A_{-\beta\mu}(z_t, \mathfrak{m}_\mu) = \frac{C}{t} + \mathfrak{P}(t) \qquad (\beta = 1, 2, 3, \ldots$$

$$A_{0\mu} = \frac{1}{t} + \frac{C}{t} + \mathfrak{P}(t),$$

$$A_{\gamma\mu} = \frac{1}{t^{\gamma+1}} + \frac{C}{t} + \mathfrak{P}(t).$$

Hält man das mit den Entwicklungen an den anderen Stellen s sammen, so folgt:

$A_{-\beta\mu}$ und $A_{0\mu}$ sind Multipla von $\mathfrak{M}^{-1}\cdot\mathfrak{N}$ und daher identisch Nul $A_{\gamma\mu}$ — für $\gamma = 1, 2, \ldots$ — zeigt das charakteristische Verhalten der Funk tionen in § 10 für $k = \mu$, und es ist daher

$$A_\gamma(z; \mathfrak{m}_\mu) = \underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}^{(\gamma)}}(z; \mathfrak{m}_\mu) \qquad (\gamma = 1, 2, \ldots$$

2. $k \neq \mu$.

Ist $i \neq k, \mu$, dann ergibt sich $A_{\gamma i}$ wieder regulär. Für $i = \mu$ ann in

$$E_{\mu k}(\overset{m}{z}_t, \overset{m}{x}_\tau)\frac{d\overset{m}{x}_\tau}{d\tau} = P(t, \tau)$$

chts wieder die $(-1)$-te Potenz auftreten, und daher auch in $A_{\gamma\mu}$. Für $= k$ dagegen folgt

$$E_{kk}\cdot\frac{d\overset{m}{x}_\tau}{dt} = \frac{1}{t-\tau} + P(t, \tau),$$

o $P(t, \tau)$ von negativen Potenzen von $t$ frei ist, und daher

$$A_{\gamma k}(\overset{m}{z}_t; \mathfrak{m}_k) = \frac{1}{t^{\gamma+1}} + \mathfrak{P}(t).$$

Zusammenfassend finden wir also

$$A_{-\beta}(z, \mathfrak{m}_k) = 0 \qquad (\beta = 0),$$

$$A_\gamma(z, \mathfrak{m}_k) = \underset{\mathfrak{M}, \mathfrak{N}}{\mathfrak{E}^{(\gamma+1)}}(z, \mathfrak{m}_k) \qquad (\gamma = 1, 2, \ldots).$$

Satz 14. *Es ist*

$$E_k(z, \overset{m}{x}_\tau)\frac{d\overset{m}{x}_\tau}{dt} = \sum_{\gamma=0}^{\infty} \underset{\mathfrak{M}, \mathfrak{N}}{\mathfrak{E}^{(\gamma+1)}}(z; \mathfrak{m}_k)\cdot\tau^\gamma \qquad (k \neq \mu)$$

$$= \sum_{\gamma=1}^{\infty} \underset{\mathfrak{M}, \mathfrak{N}}{\mathfrak{E}^{(\gamma)}}(z; \mathfrak{m}_\mu)\cdot\tau^\gamma \qquad (k = \mu).$$

## § 20.

## Entwicklung von $E(z, x)\frac{dx}{d\tau}$ in der Umgebung einer Stelle $\mathfrak{n}$.

Es sei jetzt $x$ ein Element mit dem Mittelpunkt $\mathfrak{n}$ und

$$E_{ik}(z, \overset{n}{x}_\tau)\frac{d\overset{n}{x}_\tau}{d\tau} = \sum_{(\gamma)} A_{\gamma i}(z, n_k)\tau^\gamma.$$

ann können wir uns bei der Erforschung der Koeffizienten $A_\gamma$ wieder rauf beschränken, daß $z_t$ ein Element mit demselben Mittelpunkt $\mathfrak{n}$ rstellt, da sonst alles analog ist wie in § 18. $k$ denken wir uns wieder st und unterscheiden $k = \nu$ und $k \neq \nu$.

1. $k = \nu$.

Ist $i \neq \nu$, dann kommen in

$$E_{i\nu}(\overset{n}{z}_t, \overset{n}{x}_\tau)\frac{d\overset{n}{x}_\tau}{d\tau} = P(t, \tau)$$

rechts keine negativen Potenzen von $t$ vor, und $A_{\nu i}$ ist daher regulä
Das gleiche gilt für $i = \nu$ und $P$ in

$$E_{\nu\nu}(\overset{n}{z}_t, \overset{n}{x}_\tau)\frac{d\overset{n}{x}_\tau}{d\tau} = \frac{1}{t-\tau} + P(t,\tau), \tag{25}$$

und es ist daher

$$A_{-\beta\nu} = [P(t,\tau)]_{\tau^{-\beta}} = \mathfrak{P}_{-\beta}(t) \qquad (\beta \geqq 2$$

$$A_{-1\nu} = [P(t,\tau)]_{\tau^{-1}} = \mathfrak{P}_{-1}(t),$$

$$A_{\gamma\nu} = \frac{1}{t^{\gamma+1}} + [P(t,\tau)]_{\tau^\gamma} = \frac{1}{t^{\gamma+1}} + \mathfrak{P}_\gamma(t) \qquad (\gamma \geqq 0$$

Es kommt uns noch darauf an, den Koeffizienten der nullten Pote
in den Reihen rechts zu ermitteln. Nach der Definition verschwind
$E(z,x)$ bei $\mathfrak{n}_\nu$ identisch in $x$. (25) geht daher für $t=0$ über in

$$-\frac{1}{\tau} + P(0,\tau) = 0,$$

woraus

$$P(0,\tau) = [P(t,\tau)]_{t^0} = \frac{1}{\tau}$$

folgt. Wegen

$$\Big[[P(t,\tau)]_{\tau^\gamma}\Big]_{t^0} = \Big[[P(t,\tau)]_{t^0}\Big]_{\tau^\gamma}$$

finden wir daher

$$\mathfrak{P}_{-\beta}(0) = 0, \qquad \mathfrak{P}_{-1}(0) = 1, \qquad \mathfrak{P}_\gamma(0) = 0. \tag{26}$$

Zusammenfassend haben wir also mit Rücksicht auf § 6 und § 12

$$A_{-\beta}(z, \mathfrak{n}_\nu) = 0 \ ^{22}) \qquad (\beta \geqq 2$$

$$A_{-1}(z, \mathfrak{n}_\nu) = \underset{\mathfrak{R}}{\varphi^{(\mathfrak{n})}}(z) \ ^{22})$$

$$A_\gamma(z, \mathfrak{n}_\nu) = \underset{\mathfrak{M},\mathfrak{R}}{\mathfrak{E}^{(\gamma+1)}}(z; \mathfrak{n}_\nu) \qquad (\gamma \geqq 0$$

2. Wenn $h \neq \nu$, finden wir durch die analogen Überlegungen

$$A_{-\beta}(z, \mathfrak{n}_k) = 0 \qquad (\beta \geqq 1$$

$$A_\gamma(z, \mathfrak{n}_k) = \underset{\mathfrak{M},\mathfrak{R}}{\mathfrak{E}^{(\gamma+1)}}(z; \mathfrak{n}_k) \qquad (\gamma \geqq 0$$

und haben damit

Satz 15. *Es ist*

$$E_k(z, \overset{n}{x}_\tau)\frac{d\overset{n}{x}_\tau}{d\tau} = \underset{\mathfrak{R}}{\varphi^{(\mathfrak{n})}}(z)\cdot\frac{1}{\tau} + \sum_{\gamma=0}^{\infty} \underset{\mathfrak{M},\mathfrak{R}}{\mathfrak{E}^{(\gamma+1)}}(z; \mathfrak{n}_\nu)\cdot\tau^\gamma \quad \text{für} \quad k = \nu$$

$$= \sum_{\gamma=0}^{\infty} \underset{\mathfrak{M},\mathfrak{R}}{\mathfrak{E}^{(\gamma+1)}}(z; \mathfrak{n}_k)\cdot\tau^\gamma \quad \text{für} \quad k \neq \nu.$$

[22]) Das Resultat hätte man aus der *Form* von $E(z,x)$ (23) auch direkt ge
winnen können; es liegt uns aber — hier wie überall — daran, uns ausschließlich
auf die *Definition* zu stützen.

## § 21.

## Die Entwicklung von $E(z, x)\frac{dx}{d\tau}$ in der Umgebung einer Stelle $\mathfrak{a}$.

Wählen wir nunmehr $x_\tau = \mathfrak{a} + \tau$ und erinnern an die Bezeichnung (24), dann handelt es sich um die Erforschung der Entwicklung

$$\frac{1}{\tau^{\bar{\alpha}_k}} \overset{-,a}{E}_{ik}(z, \overset{a}{x}_\tau)\frac{d\overset{a}{x}_\tau}{d\tau} = \frac{1}{\tau^{\varepsilon_k}}\sum_{(\gamma)} A_{\gamma i}(z, \mathfrak{a}_k)\tau^\gamma .$$

Für alle von $\mathfrak{a}$ verschiedenen Stellen $z$ bleibt auch jetzt alles analog wie in § 18, weswegen wir bloß den Fall, daß $z_t = \mathfrak{a} + t$ ist, näher untersuchen. Hier ist zunächst

$$\frac{1}{t^{\alpha_i}}\frac{1}{\tau^{\bar{\alpha}_k}} \overset{a,a}{E}_{ik}(\overset{a}{z}_t, \overset{a}{x}_\tau)\frac{d\overset{a}{x}_\tau}{d\tau} = \frac{1}{\tau^{\varepsilon_k}}\sum_{(\gamma)}\frac{1}{t^{\alpha_i}}\overset{a}{A}_{\gamma i}(z, \mathfrak{a}_k)\tau^\gamma$$

und die linke Seite ist gleich

$$\frac{\sum \frac{1}{t^{\alpha_i}}\overset{a}{\zeta}{}_i^{(1)} \cdot \frac{1}{\tau^{\bar{\alpha}_k}}\overset{a}{\bar{\zeta}}{}_k^{(1)}\, d\overset{a}{x}_\tau}{t-\tau \qquad d\tau} + \ldots,$$

wobei die folgenden Glieder nur angedeutet sind und zu erinnern ist, daß $\overset{a}{z}_t = \overset{a}{x}_\tau$

$$\sum \overset{a}{\zeta}{}_i^{(1)}\overset{a}{\bar{\zeta}}{}_k^{(1)} = \delta_{ik}.$$

Ist zunächst $i \neq k$, dann hat (27) die Form[23])

$$\frac{1}{\tau^{\varepsilon_k}}\frac{\overline{P}(t, \tau)}{t-\tau} = \frac{1}{\tau^{\varepsilon_k}}\cdot\frac{1}{t^0\tau^{\lambda'}}\cdot\frac{\mathfrak{P}(t, \tau)}{t-\tau},$$

und hierin ist nach dem Hilfssatz (s. Anm. 18) $\mathfrak{P}(t, \tau)$ durch $t-\tau$ teilbar, so daß die ganze linke Seite von (27) die Form hat

$$\frac{1}{\tau^{\varepsilon_k}}P(t, \tau),$$

worin negative Potenzen von $t$ nicht vorkommen. Also ist

$$\frac{1}{t^{\alpha_i}}\overset{a}{A}_{\gamma i} = \left[\frac{1}{\tau^{\varepsilon_k}}P(t, \tau)\right]_{\tau^\gamma} = \mathfrak{P}(t).$$

Für $i = k$ hingegen bringen wir unter Benutzung von $\varepsilon = \alpha + \bar{\alpha}$ (27) die Gestalt

$$\frac{1}{\tau^{\varepsilon_k}}\cdot\frac{\tau^{\alpha_k+\bar{\alpha}_k}\sum \frac{1}{t^{\alpha_k}}\overset{a}{\zeta}{}_k^{(1)}\cdot\frac{1}{\tau^{\bar{\alpha}_k}}\overset{a}{\bar{\zeta}}{}_k^{(1)}\, d\overset{a}{x}_\tau}{t-\tau \qquad d\tau} + \ldots.$$

[23]) Unter Anwendung des Komplementensatzes (§ 4) würden wir auch sofort erkennen, daß $\lambda' = 0$ ist.

Für $t=\tau$ wird wegen (28) der Zähler gleich 1 und daher die Differenz

$$\frac{1}{\tau^{\varepsilon_k}}\cdot\frac{\tau^{\alpha_k+\breve{\alpha}_k}\sum\cdots\frac{d\overset{a}{x}_\tau}{d\tau}}{t-\tau}-\frac{1}{\tau^{\varepsilon_k}}\cdot\frac{1}{t-\tau}=\frac{1}{\tau^{\varepsilon_k}}\frac{\bar{P}(t,\tau)}{t-\tau}$$

nicht mehr unendlich für $t=\tau$. Daraus folgt schließlich

$$\frac{1}{t^{\alpha_k}}\frac{1}{\tau^{\breve{\alpha}_k}}\overset{a,a}{E}_{kk}(\overset{a}{z}_t,\overset{a}{x}_\tau)\frac{d\overset{a}{x}_\tau}{d\tau}=\frac{1}{\tau^{\varepsilon_k}}\left(\frac{1}{t-\tau}+P(t,\tau)\right)$$

und hier kommen in $P(t,\tau)$ ebenfalls keine negativen Potenzen von $t$ vor, da für $t=0$ und beliebiges $\tau(\neq t)$ die linke Seite regulär ist. Also folgt schließlich

$$\frac{1}{t^{\alpha_k}}\overset{a}{A}_{-\beta k}(z,\mathfrak{a}_k)=[P(t,\tau)]_{\tau^{-\beta}}=\mathfrak{P}(t) \qquad (\beta\geqq$$

$$\frac{1}{t^{\alpha_k}}\overset{a}{A}_{\gamma k}(z,\mathfrak{a}_k)=\frac{1}{t^{\gamma+1}}+[P(t,\tau)]_{\tau^\gamma}=\frac{1}{t^{\gamma+1}}+\mathfrak{P}(t) \qquad (\gamma\geqq$$

Die Zusammenfassung mit dem Verhalten an den übrigen Stellen lehrt also nach § 14

$$A_{-\beta}(z,\mathfrak{a}_k)=0 \qquad (\beta\geqq$$

$$A_\gamma(z,\mathfrak{a}_k)=\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}^{(\gamma+1)}}(z;\mathfrak{a}_k) \qquad (\gamma\geqq$$

und wir haben den

Satz 16. *Es ist*

$$\frac{1}{\tau^{\breve{\alpha}_k}}\overset{a}{\bar{E}}_k(z,\overset{a}{x}_\tau)\frac{d\overset{a}{x}_\tau}{d\tau}=\frac{1}{\tau^{\varepsilon_k}}\sum_{\gamma=0}^{\infty}\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}^{(\gamma+1)}}(z;\mathfrak{a}_k)\tau^\gamma.$$

## § 22.

**Die Entwicklung von $E(z,x)\frac{dx}{d\tau}$ in der Umgebung der Stelle $\mathfrak{p}_x$.**

Setzen wir für $\overset{\infty}{x}_\tau=\frac{1}{\tau}$ die Entwicklung an

$$E_{ik}(z,\overset{\infty}{x}_\tau)\frac{d\overset{\infty}{x}_\tau}{d\tau}=\sum_{(\gamma)}A_{\gamma i}(z,\mathfrak{p}_{\infty k})\tau^\gamma,$$

so folgt durch die nämlichen Schlüsse

$$A_{-\beta}(z,\mathfrak{p}_{\infty k})=0 \qquad (\beta\geqq$$

$$A_\gamma(z,\mathfrak{p}_{\infty k})=\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}^{(\gamma+1)}}(z;\mathfrak{p}_{\infty k}) \qquad (\gamma\geqq$$

und damit

Satz 17. *Es ist*

$$E_k(z,\overset{\infty}{x}_\tau)\frac{d\overset{\infty}{x}_\tau}{d\tau}=\sum_{\gamma=0}^{\infty}\underset{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}{\mathfrak{E}^{(\gamma+1)}}(z;\mathfrak{p}_{\infty k})\tau^\gamma.$$

## § 23.

### Das III. Elementartheorem.

Wir fassen die Ergebnisse dieses Abschnittes zusammen in dem enden

III. Elementartheorem. *Entwickelt man die den Parameter $x$ altende, in bezug auf $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ algebraisch charakterisierte Elementar-ktion $E^{(1)}_{\mathfrak{M},\mathfrak{N}}(z_i, x_\tau)$ der Klasse $(K)$ nach Potenzen von $\tau$, nachdem n sie vorher mit $\frac{dx}{d\tau}$ multipliziert hat, so entspringen als Entwicklungs-ffizienten sämtliche in bezug auf $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ charakterisierte Elementar-ktionen von $(K)$ — und jede genau einmal.*

# IV. Abschnitt.

# Das Elementardifferential $d\breve{F}^{(1)}_{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}(x, z)$.

## § 24.

### Definition, Charakterisierung, Aufstellung.

Als Gegenstück zu III § 17 konstruieren wir jetzt ein Differential $d\breve{F}$ Klasse $(\breve{K})$ mit dem Argument $x$, welches einen Parameter $z$ enthält in bezug auf $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{M}$ algebraisch charakterisiert ist. Es sei

$$\frac{d\breve{F}_{ki}(x, z)}{dx}$$

Funktion des Arguments $x$ — bei festem $i$ und $z$ — eine Funktion Klasse $(\breve{K})$, als Funktion des Parameters $z$ — bei festem $k$ und $x$ — Funktion von $(K)$. Ferner sei in Abhängigkeit von $x$ das Diffe-ial $\frac{d\breve{F}_{ki}}{dx}\frac{dx}{d\tau}$ der Klasse $(\breve{K})$ — bei festem $i$ und willkürlich gewähltem, öhnlichem $\bar{z}$ — Multiplum von $\mathfrak{N}^{-1}\cdot\mathfrak{M}$, abgesehen von der Stelle $x = \bar{z}$, es sich verhalten möge wie

$$\frac{d\breve{F}_{ki}(x_\tau, \bar{z})}{dx}\frac{dx}{d\tau} = \mathfrak{P}(\tau) \quad \text{für} \quad k \neq i \qquad (\tau = x - \bar{z}).$$
$$= \frac{1}{\tau} + \mathfrak{P}(\tau) \quad „ \quad k = i$$

Analog wie in § 17 zeigt man, daß durch diese Definition $d\breve{F}$ ein-tig festgelegt ist. Zur Konstruktion gehen wir in ähnlicher Weise von Differential

$$-\breve{\vartheta}_{ki}(x, z)\frac{dx}{d\tau} = \frac{\sum \breve{\zeta}^{(1)}_k(x)\,\zeta^{(1)}_i(z)}{x - z}\frac{dx}{d\tau}$$

aus, welches an der variablen Stelle $\bar{z}$ bereits das geforderte Verhalt besitzt und abgesehen von $\mathfrak{p}_\infty$ sich regulär verhält, da $\breve{\zeta}^{(1)} \ldots \breve{\zeta}^{(n)}$ Fundamentalsystem [24]) der Klasse $(K)$ für das Ideal $J\left(\frac{1}{3}\right)$ und dal $\breve{\zeta}^{(1)}\frac{dx}{d\tau}, \ldots, \breve{\zeta}^{(n)}\frac{dx}{d\tau}$ für die — abgesehen von $\mathfrak{p}_\infty$ — überall endlichen Dif rentiale von $(\breve{K})$ ist. Die Regularität bei $\mathfrak{p}_\infty$ und das Verschwinden $\mathfrak{M}$ erreichen wir wieder durch Subtraktion geeigneter Ausdrücke, an der charakteristisch ist, daß sie das Produkt aus einem Differential von und einer Funktion von $(K)$ sind. Es wird

$$(32) \qquad d\breve{F}^{(1)}_{ki}(x, z) = -\breve{\vartheta}_{ki}(x, z)\,dx$$

$$-d\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{\breve{\mathfrak{F}}^{(\breve{\lambda}_k)}_k}(x; \mathfrak{p}_{x\,k})\cdot g^{(\breve{\lambda}_k)}_i(z) - \ldots - d\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{\breve{\mathfrak{F}}^{(1)}_k}(x; \mathfrak{p}_{x\,k})\cdot g^{(1)}_i(z)$$

$$+\sum_{(\mathfrak{m})} d\underset{\mathfrak{M}}{\breve{\psi}^{(\mathfrak{m})}_k}(x)\cdot\vartheta_{\mu i}(\mathfrak{m}, z).$$

Wir untersuchen im folgenden die Entwicklung von $d\breve{F}$ nach de Parameter $z$.

## § 25.

## Die Entwicklung von $d\breve{F}(x, z)$ in der Umgebung einer gewöhnlich Stelle $\overset{0}{z}$.

In der Entwicklung

$$\frac{d\breve{F}_{ki}(x, \overset{0}{z}_t)}{dx}\frac{dx}{d\tau} = \sum_{(\gamma)} \breve{A}_{\gamma k}(x, \overset{0}{z}_{0i})\frac{dx}{d\tau}\cdot t^\gamma$$

sind die Koeffizienten Differentiale von $(\breve{K})$. Zur Erforschung ihrer Nat sei $x$ der Reihe nach wieder ein Element mit dem Mittelpun $\overset{0}{x}_0, \mathfrak{n}, \mathfrak{m}, \mathfrak{a}, \mathfrak{p}_\infty; \overset{0}{z}_0$. Wir können uns jetzt sehr kurz fassen, da die die Hauptschwierigkeit bietende — Untersuchung von $\breve{\vartheta}(x)$ dieselbe wie von $\vartheta(z)$.

1. Für $\overset{0}{x}_0 \neq \overset{0}{z}_0$

ist wiederum $$\breve{A}_\gamma\frac{dx}{d\tau} = \mathfrak{P}(\tau);$$

2. für $\overset{\mathfrak{n}}{x}_\tau = \mathfrak{n} + \tau$

kann in $\breve{A}_{\gamma k}(\overset{\mathfrak{n}}{z}_\tau, \overset{0}{z}_{0i})\frac{d\overset{\mathfrak{n}}{x}_\tau}{d\tau}$ die $(-1)$-te Potenz von $\tau$ auftreten für $k =$

3. für $\overset{\mathfrak{m}}{x}_\tau = \mathfrak{m} + \tau$

fehlt hingegen in $\breve{A}_{\gamma k}(\overset{\mathfrak{m}}{x}_\tau, \overset{0}{z}_{0i})\frac{d\overset{\mathfrak{m}}{x}_\tau}{d\tau} = \mathfrak{P}_k(\tau)$ die erste Potenz von $\tau$ für $k =$

[24]) S. den Komplementensatz § 4.

4. für $\overset{a}{x}_\tau = \mathfrak{a} + \tau$

d

$$\frac{1}{\tau^{\overset{a}{\alpha}_k}} \frac{d\overset{a,-}{F}_{ki}(\overset{a}{x}_\tau, \overset{0}{z}_\tau)}{dx} \frac{d\overset{a}{x}_\tau}{d\tau} = \sum_{(\gamma)} \frac{1}{\tau^{\overset{a}{\alpha}_k}} \overset{a}{A}_{\gamma k}(\overset{a}{x}_\tau, \overset{0}{z}_{0i}) \frac{d\overset{a}{x}_\tau}{d\tau} \cdot t^\gamma = \frac{1}{\tau^{\varepsilon_k}} P_{ki}(t, \tau)$$

l hier kommen in $P_{ki}(t, \tau)$ keine negativen Potenzen von $\tau$ vor, da für $\tau = 0$ regulär ist[25]). Mithin ist

$$\frac{1}{\tau^{\overset{a}{\alpha}_k}} \overset{a}{A}_{\gamma k} \frac{d\overset{a}{x}_\tau}{d\tau} = \frac{1}{\tau^{\varepsilon_k}} \mathfrak{P}_{ki}(\tau),$$

o ebenfalls regulär.

5. Für $\overset{\infty}{x}_\tau = \frac{1}{\tau}$

; dasselbe und

6. für $\overset{0}{x}_\tau = \overset{0}{z}_t$

gt analog wie in § 18, 6

$$A_{\gamma k}(\overset{0}{x}_\tau, \overset{0}{z}_{0i}) \frac{d\overset{0}{x}_\tau}{d\tau} = \mathfrak{P}_k(\tau) \qquad (k \neq i)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\tau^{\gamma+1}} + \mathfrak{P}(\tau) & (k = i \text{ und } \gamma \geqq 0), \\ \mathfrak{P}(\tau) & (\gamma < 0) \end{cases}$$

daß also insgesamt resultiert (§ 9):

$$\overset{-}{A}_{-\beta k}(x, \overset{0}{z}_{0i}) \frac{dx}{d\tau} = 0 \qquad (\beta \geqq 1)$$

$$\overset{-}{A}_{\gamma k}(x, \overset{0}{z}_{0i}) \frac{dx}{d\tau} = \frac{d\overset{-}{\mathfrak{E}}^{(\gamma+1)}_{\mathfrak{N}, \mathfrak{M}}(x, \overset{0}{z}_{0i})}{d\tau}$$

l damit

Satz 18. *Es ist*

$$d\overset{-}{F}_{\overset{i}{\mathfrak{N}, \mathfrak{M}}}(x, \overset{0}{z}_t) = \sum_{\gamma=0}^{\infty} d\overset{-}{\mathfrak{F}}^{(\gamma+1)}_{\mathfrak{N}, \mathfrak{M}}(x; \overset{0}{z}_{0i}) \cdot t^\gamma.$$

Zusatz. *Speziell füz $\gamma = 0$ wird*

$$d\overset{-}{F}_{\overset{i}{\mathfrak{N}, \mathfrak{M}}}(x, \overset{0}{z}_0) = d\overset{-}{\mathfrak{F}}^{(1)}_{\mathfrak{N}, \mathfrak{M}}(x; \overset{0}{z}_{0i}).$$ [26])

---

[25]) Man beachte die Definition des Multiplums in § 3! Eine Funktion $(y, \overset{-}{y})$ von oder ein Differential $(d\overset{-}{J}, d\overset{a}{\overset{-}{J}})$ von $(\overset{-}{K})$ heißt „endlich“ oder „regulär“ an einer le $\mathfrak{c}$, wenn es daselbst Multiplum von $\begin{cases} \mathfrak{c}_1^0 \\ \mathfrak{c}_2^0 \\ \vdots \\ \mathfrak{c}_n^0 \end{cases}$ ist.

[26]) Der einfacheren Schreibweise wegen lasse ich hier und in den folgenden zen den laufenden Index $k$ weg und schreibe $d\overset{-}{F}$ statt $\frac{d\overset{-}{F}}{dx}\frac{dx}{d\tau}$.

## § 26.

**Die Entwicklung von $d\breve{F}(x, z)$ in der Umgebung von $\mathfrak{n}$.**

$$\frac{d\breve{F}_{ki}(x, \overset{n}{z_t})}{dx}\frac{dx}{d\tau} = \sum_{(\gamma)} \breve{A}_{\gamma k}(x; \mathfrak{n}_i)\frac{dx}{d\tau}\cdot t^{\gamma}.$$

Wir geben hier gleich das Resultat

$$\breve{A}_{-\beta}\frac{dx}{d\tau} = 0, \qquad \breve{A}_0\frac{dx}{d\tau} = 0 \qquad (\beta \geqq$$

1. $i = \nu$:

$$\breve{A}_{\gamma}\frac{dx}{d\tau} = \frac{d\breve{\mathfrak{F}}^{\gamma}_{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}(x; \mathfrak{n}_\nu)}{d\tau} \qquad (\gamma \geqq$$

2. $i \neq \nu$:

$$\breve{A}_{-\beta}\frac{dx}{d\tau} = 0 \qquad (\beta \geqq$$

$$\breve{A}_{\gamma}\frac{dx}{d\tau} = \frac{d\breve{\mathfrak{F}}^{(\gamma+1)}(x; \mathfrak{n}_i)}{d\tau} \qquad (\gamma \geqq$$

und damit

Satz 19. *Es ist*

$$d\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{\breve{F}_i}(x, \overset{n}{z_t}) = \sum_{\gamma=1}^{\infty} d\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{\breve{\mathfrak{F}}^{(\gamma+1)}}(x; \mathfrak{n}_i)\cdot t^{\gamma} \qquad (i \neq$$

$$= \sum_{\gamma=1}^{\infty} d\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{\breve{\mathfrak{F}}^{(\gamma)}}(x; \mathfrak{n}_\nu)\cdot t^{\gamma} \qquad (i = \nu$$

## § 27.

**Die Entwicklung von $d\breve{F}(z, x)$ in der Umgebung von $\mathfrak{m}$.**

Indem man hier wie in § 20 schließt, bekommt man (§ 7, § 13)

Satz 20. *Es ist*

$$d\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{\breve{F}_i}(x, \overset{m}{z_t}) = d\underset{\mathfrak{M}}{\breve{\psi}^{(\mathfrak{m})}}(x)\cdot\frac{1}{t} = \sum_{\gamma=0}^{\infty} d\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{\breve{\mathfrak{E}}^{(\gamma+1)}}(x; \mathfrak{m}_\mu)\cdot t^{\gamma} \quad (\text{für } i = \mu$$

$$= \sum_{\gamma=0}^{\infty} d\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{\breve{\mathfrak{E}}^{(\gamma+1)}}(x; \mathfrak{m}_i)\cdot t^{\gamma} \quad (\text{für } i \neq \mu$$

## § 28.

**Die Entwicklung von $d\breve{F}(x, z)$ in der Umgebung von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{p}_\infty$.**

Da der Beweis völlig parallel zu § 21 bzw. § 22 verläuft, geben wi
hier gleich die beiden Sätze.

Satz 21. *Es ist*

$$\frac{1}{t^{a_i}}d\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{\breve{F}_i}(x, \overset{a}{z_t}) = \sum_{\gamma=0}^{\infty} d\underset{\mathfrak{N},\mathfrak{M}}{\breve{\mathfrak{F}}^{(\gamma+1)}}(x; \mathfrak{a}_i)\cdot t^{\gamma},$$

Satz 22. *Es ist*

$$d\overset{\mathfrak{R}, \mathfrak{M}}{\breve{F}_i}(x, \overset{\infty}{z}_t) = \sum_{\gamma=0}^{\infty} d\overset{\mathfrak{R}, \mathfrak{M}}{\breve{\mathfrak{F}}^{(\gamma+1)}}(x; \mathfrak{p}_{\infty i}) t^{\gamma}.$$

## § 29.

## Das IV. Elementartheorem.

Entwickelt man das den Parameter $z$ enthaltende, in bezug auf $\mathfrak{R}, \mathfrak{M}$ braisch charakterisierte Elementardifferential $d\overset{\mathfrak{R}, \mathfrak{M}}{\breve{F}}(x, z_t)$ der Klasse $(\breve{K})$ n Potenzen von $t$, so entspringen als Entwicklungskoeffizienten sämtle, in bezug auf $\mathfrak{R}, \mathfrak{M}$ charakterisierte Elementardifferentiale von $(\breve{K})$ und jedes genau einmal.

## V. Schlußwort.

Das Fundament der Funktionentheorie bildet die Kenntnis der „*Bauine*", aus denen sich die einfachsten Funktionsklassen und ihre Integrale bauen, nebst deren *Charakterisierung*. Durch die vorstehenden Unterungen wird diese Kenntnis für das ganze organische Reich gewonnen, ches mit den rationalen Funktionen beginnend, über die algebraischen ktionen hinweg, zu den Funktionsgattungen hinanreicht, die Riemann einem Fragment „Zwei allgemeine Lehrsätze über lineare Differentialchungen" (Gesammelte Werke Nr. XXI, zweite Auflage, 1892) definiert Wir gewinnen damit zugleich den wahren Einblick in das organische tz dieses Reiches, welches auf dem bisher einzig und allein bekannten braischen Gebiet noch verschleiert dalag.

Das hatte darin hauptsächlich seinen Grund, daß auf dem letzteren iet 1. die Klasse $(K)$ mit ihrer komplementären $(\breve{K})$ zusammenfällt, unktionen und Differentiale eine sehr ungleichartige Stellung einzunehmen inen, 3. die Geschlechtszahl $p$ verschiedene Rollen übernimmt, die erst dem höheren Gebiet auseinandertreten. So entzog sich die wunderbare lität, die in der Charakterisierung der Funktionen und Differentiale (s. § 5), bisher den Blicken.

Die Fruchtbarkeit der gewonnenen Erkenntnisse wird sich darin zeigen, es mit ihrer Hilfe gelingt, die vollständige Reihe der sog. „*Verchungstheoreme*" zu entdecken, die in den berühmten Sätzen von l, Weierstraß, Fuchs ihre Vorläufer haben. Das soll eine folgende it bringen.

(Eingegangen am 14. April. 1921.)

# Über die Umwandlung von Potenzreihen in Kettenbrüche.

Von

Alfred Tauber in Wien.

---

Einer vorgegebenen Potenzreihe $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$ korrespondier heißt der Kettenbruch

$$(1) \qquad \frac{\alpha_0}{|1} - \frac{\alpha_1 x}{|1} - \frac{\alpha_2 x}{|1} - \frac{\alpha_3 x}{|1} - \ldots$$

dann, wenn die Größen $\alpha_\varkappa$ mit Hilfe der Determinanten

$$(2) \qquad \Psi_{2\nu} = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \ldots & c_\nu \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_{\nu+1} \\ \vdots & & & \\ c_\nu & c_{\nu+1} & \ldots & c_{2\nu} \end{vmatrix}, \qquad \Psi_{2\nu+1} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_{\nu+1} \\ c_2 & c_3 & \ldots & c_{\nu+2} \\ \vdots & & & \\ c_{\nu+1} & c_{\nu+2} & \ldots & c_{2\nu+1} \end{vmatrix},$$

(deren keine verschwinden darf) sich für $\varkappa \geqq 0$ in der Form darstel lassen[1]):

$$(3) \qquad \alpha_\varkappa = \frac{\Psi_\varkappa \Psi_{\varkappa-3}}{\Psi_{\varkappa-1} \Psi_{\varkappa-2}}, \qquad \Psi_{-1} = \Psi_{-2} = \Psi_{-3} = 1.$$

Bildet man nun aus den beiden Determinanten (2) andere z dadurch, daß man die Indizes der Elemente der letzten Kolonne um erhöht, während die übrigen Kolonnen ungeändert bleiben, so *best zwischen den so erhaltenen Determinanten*

$$(4) \qquad \Phi_{2\nu} = \begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \ldots & c_{\nu-1} & c_{\nu+1} \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_\nu & c_{\nu+2} \\ \vdots & & & & \\ c_\nu & c_{\nu+1} & \ldots & c_{2\nu-1} & c_{2\nu+1} \end{vmatrix}, \qquad \Phi_{2\nu+1} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_\nu & c_{\nu+ \\ c_2 & c_3 & \ldots & c_{\nu+1} & c_{\nu+ \\ \vdots & & & & \\ c_{\nu+1} & c_{\nu+2} & \ldots & c_{2\nu} & c_{2\nu- \end{vmatrix}$$

---

[1]) Vgl. O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, Berlin-Leipzig 19 S. 304.

it $\Phi_0 = c_1$, $\Phi_1 = c_2$) *und den Determinanten* (2), wie in § 1 gezeigt
rd, die Beziehung

) $$\Phi_\varkappa \Psi_{\varkappa-1} - \Psi_\varkappa \Phi_{\varkappa-1} = \Psi_{\varkappa+1} \Psi_{\varkappa-2} \qquad (\varkappa \geqq 0),$$

bei $\Phi_{-1} = 0$ zu setzen ist. Dadurch erhält man für die gesuchten
ößen $\alpha$ die Form[2])

a) $$\alpha_\varkappa = \frac{\Phi_{\varkappa-1}}{\Psi_{\varkappa-1}} - \frac{\Phi_{\varkappa-2}}{\Psi_{\varkappa-2}} \qquad (\varkappa \geqq 1)$$

er, wenn statt der $\alpha$ deren Summen eingeführt werden,

b) $$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{\varkappa+1} = \frac{\Phi_\varkappa}{\Psi_\varkappa} \qquad (\varkappa \geqq 0).$$

Ein verhältnismäßig einfaches *Bildungsgesetz* der $\Psi$ kann man an-
ben, wenn man sich $c_0, c_1, c_2, \ldots$ unter Einführung einer Veränderlichen $y$
rläufig ersetzt denkt durch $\varphi(y), \varphi'(y), \varphi''(y), \ldots$. Dann gehen die
eterminanten $\Psi$ in Funktionen von $y$ über, für welche die Beziehung

) $$\Psi_{\varkappa+1} \Psi_{\varkappa-2} = \Psi_{\varkappa-1} \frac{d\Psi_\varkappa}{dy} - \Psi_\varkappa \frac{d\Psi_{\varkappa-1}}{dy}$$

wiesen werden kann, und diese nimmt, wenn $\chi_{\varkappa+1} = \Psi_{\varkappa+1} / \Psi_\varkappa$ definiert
rd, die Gestalt an

a) $$\chi_{\varkappa+1} = \frac{\chi_{\varkappa-1}}{\chi_\varkappa} \frac{d\chi_\varkappa}{dy}, \qquad \chi_0 = \varphi(y), \qquad \chi_{-1} = 1.$$

Nachträglich hat man wieder $c_0, c_1, c_2, \ldots$ für $\varphi(y), \varphi'(y), \varphi''(y), \ldots$
*restituieren.*

Jedoch ist die Gleichung (6) nur ein Spezialfall des Resultats einer
gemeineren Untersuchung.

Es gelangen nämlich überhaupt die Determinanten $\Phi$ und $\Psi$ in einen
sonderen Zusammenhang, wenn die Koeffizienten $c_\varkappa$ der Potenzreihe von
ıer Veränderlichen $y$ derart abhängen, daß $c_\varkappa = c_\varkappa(y)$ der Bedingung
nügt

) $$c_\varkappa'(y) = \sigma_\varkappa(y) c_{\varkappa+1}(y) + \tau_\varkappa(y) c_\varkappa(y),$$

t Funktionen $\sigma_\varkappa(y)$, $\tau_\varkappa(y)$, deren Differenzen

a) $$\sigma_{\varkappa+1}(y) - \sigma_\varkappa(y) = \sigma(y), \qquad \tau_{\varkappa+1}(y) - \tau_\varkappa(y) = \tau(y)$$

n $\varkappa$ unabhängig sind, wie z. B. bei der Taylorschen Reihe für $f(x+y)$
t

) $$c_\varkappa = \frac{f^{(\varkappa)}(y)}{\varkappa!}, \qquad \sigma_\varkappa(y) = \varkappa + 1, \qquad \tau_\varkappa(y) = 0$$

[2]) Aus (5a) folgt sofort die bekannte Relation

$$\alpha_{2\nu} + \alpha_{2\nu+1} = \frac{\Phi_{2\nu}}{\Psi_{2\nu}} - \frac{\Phi_{2\nu-2}}{\Psi_{2\nu-2}}$$

l. Perron a. a. O., S. 324, 331).

oder bei der Lagrangeschen Reihe für die Wurzel $\eta$ einer Gleichu $f(\eta) = 0$ nach Potenzen von $f(y)$, wo $y$ die Rolle eines Parameter spie gemäß den Formeln

$$(9) \qquad \eta = y - x\psi(\eta), \qquad x = f(y), \qquad \psi(\eta) = \frac{\eta - y}{f(\eta) - f(y)},$$

$$(10) \qquad \eta = \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \frac{(-1)^\varkappa h_\varkappa(y) x^\varkappa}{\varkappa!}, \qquad h_{\varkappa+1}(y) = \frac{h_\varkappa'(y)}{f'(y)}, \qquad h_0(y) = y,$$

wenn an der so zu gewinnenden Potenzreihenentwicklung

$$\sum_{\varkappa=0}^{\infty} c_\varkappa(y) x^\varkappa$$

in

$$(11) \qquad \eta = y - \frac{f(y)}{f'(y)} \sum_{\varkappa=0}^{\infty} c_\varkappa(y) x^\varkappa, \qquad c_\varkappa(y) = \frac{(-1)^\varkappa h_{\varkappa+1}(y) f'(y)}{(\varkappa+1)!}$$

die Umwandlung in einen Kettenbruch vorgenommen wird (vgl. 39b) u

Unter der Voraussetzung (7) beweist man aber (s. § 2) die Gleichu

$$(12) \qquad \frac{d\Psi_\varkappa}{dy} = \sigma_\varkappa \Phi_\varkappa + \varrho_\varkappa \Psi_\varkappa, \qquad \varrho_{2\nu} = (\nu+1)\tau_\nu, \qquad \varrho_{2\nu+1} = (\nu+1)\tau_{\nu+}$$

eine Gleichung, mittels welcher sich auch eine, nur die Funktionen $\sigma_\varkappa(y$ $\tau_\varkappa(y)$ benutzende, Beziehung zwischen den Determinanten $\Psi$ ergibt, der aus (5) und (12) folgt

$$(13) \qquad \Psi_{\varkappa+1}\Psi_{\varkappa-2} = \frac{\Psi_{\varkappa-1}}{\sigma_\varkappa}\frac{d\Psi_\varkappa}{dy} - \frac{\Psi_\varkappa}{\sigma_{\varkappa-1}}\frac{d\Psi_{\varkappa-1}}{dy} + \left(\frac{\varrho_\varkappa}{\sigma_\varkappa} - \frac{\varrho_{\varkappa-1}}{\sigma_{\varkappa-1}}\right)\Psi_\varkappa\Psi_{\varkappa-1}$$

und aus der Formel (5b) wird dann

$$(14) \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{\varkappa+1} = \frac{1}{\sigma_\varkappa}\frac{1}{\Psi_\varkappa}\frac{d\Psi_\varkappa}{dy} - \frac{\varrho_\varkappa}{\sigma_\varkappa}.$$

Zur Gleichung (6) gelangt man aus (13) in dem besonderen Falle

$$(15) \qquad \sigma_\varkappa = 1, \qquad \tau_\varkappa = 0.$$

Über einen Zusammenhang mit dem Newtonschen Näherungsve fahren vgl. § 3.

## § 1.

Obschon der Hilfssatz (5) in einem der zahlreichen allgemeine Matrizensätze enthalten sein dürfte, erscheint doch in Anbetracht de ziemlich elementaren Charakters der hier besprochenen Aufgaben ei Beweis, der nur die Anfangsgründe der Determinantentheorie heranzieh wohl nicht überflüssig. Bezeichnet man mit $\Psi_{\varkappa\lambda}$ resp. $\Phi_{\varkappa\lambda}$ die zum $\lambda+1$-te Elemente, von rechts gerechnet, der untersten Zeile von $\Psi_\varkappa$ resp. $\Phi_\varkappa$ gehöri

terdeterminante und entwickelt die Determinanten $\Psi_\varkappa$ und $\Phi_\varkappa$ nach der ersten Zeile

$$\Psi_\varkappa = \sum_{\lambda=0}^{\varkappa'} c_{\varkappa-\lambda}\,\Psi_{\varkappa\lambda}, \qquad \Phi_\varkappa = c_{\varkappa+1}\,\Phi_{\varkappa 0} + \sum_{\lambda=1}^{\varkappa'} c_{\varkappa-\lambda}\,\Phi_{\varkappa\lambda}, \qquad \varkappa' = E\left(\frac{\varkappa}{2}\right),$$

ergibt die Substitution dieser Werte in (5) bei $\varkappa'' = E\left(\frac{\varkappa+1}{2}\right)$

$$\Psi_{\varkappa-1}\left[c_{\varkappa+1}\,\Phi_{\varkappa 0} + \sum_{\lambda=1}^{\varkappa'} c_{\varkappa-\lambda}\,\Phi_{\varkappa\lambda}\right] - \Phi_{\varkappa-1}\sum_{\lambda=0}^{\varkappa'} c_{\varkappa-\lambda}\,\Psi_{\varkappa\lambda}$$

$$= \Psi_{\varkappa-2}\sum_{\lambda=0}^{\varkappa''} c_{\varkappa+1-\lambda}\,\Psi_{\varkappa+1,\lambda} = \Psi_{\varkappa-2}\left[c_{\varkappa+1}\,\Psi_{\varkappa+1,0} + \sum_{\lambda=0}^{\varkappa''-1} c_{\varkappa-\lambda}\,\Psi_{\varkappa+1,\lambda+1}\right].$$

Hierin sind die Koeffizienten von $c_{\varkappa+1}$ und ebenso von $c_\varkappa$ auf beiden ten gleich, wegen der sofort als richtig zu erkennenden Gleichungen

$$\Psi_{\varkappa 0} = \Phi_{\varkappa 0} = \Psi_{\varkappa-2}, \qquad \Psi_{\varkappa 1} = -\Phi_{\varkappa-2},$$

er auch für jedes der übrigen $c_{\varkappa-\lambda}$ kann die Übereinstimmung der effizienten auf beiden Seiten nachgewiesen werden, d. h. *das Bestehen von*

$$\Psi_{\varkappa-1}\,\Phi_{\varkappa\lambda} - \Phi_{\varkappa-1}\,\Psi_{\varkappa\lambda} = \Psi_{\varkappa-2}\,\Psi_{\varkappa+1,\lambda+1}$$

$\lambda = 1$ bis $\varkappa'' - 1$; links in (17) nimmt zwar die Summationsiable $\lambda$ im Falle eines *geraden* $\varkappa$ noch den Wert $\frac{\varkappa}{2}$ an, welcher rechts ht vorkommt, dafür verschwindet dann links der Koeffizient von $c_{\frac{\varkappa}{2}}$, mlich die Differenz $\Psi_{\varkappa-1}\,\Phi_{\varkappa,\frac{\varkappa}{2}} - \Phi_{\varkappa-1}\,\Psi_{\varkappa,\frac{\varkappa}{2}}$, mit Rücksicht auf

$$\Psi_{\varkappa,\frac{\varkappa}{2}} = (-1)^{\frac{\varkappa}{2}}\,\Psi_{\varkappa-1}, \qquad \Phi_{\varkappa,\frac{\varkappa}{2}} = (-1)^{\frac{\varkappa}{2}}\,\Phi_{\varkappa-1}.$$

Nunmehr seien die beiden Fälle $\varkappa = 2\nu$ und $2\nu+1$ unterschieden.

I. Bei $\varkappa = 2\nu$ lautet die zu beweisende Gleichung (19)

$$\Psi_{2\nu-1}\,\Phi_{2\nu,\lambda} - \Phi_{2\nu-1}\,\Psi_{2\nu,\lambda} = \Psi_{2\nu-2}\,\Psi_{2\nu+1,\lambda+1}, \quad 1 \leqq \lambda \leqq \nu-1.$$

in ihr auftretenden Determinanten haben sämtlich den Grad $\nu$, und in er der Determinanten $\Phi_{2\nu,\lambda}$, $\Psi_{2\nu,\lambda}$, $\Psi_{2\nu+1,\lambda+1}$ fehlt die Kolonne mit dem pfelement $c_{\nu-\lambda}$. Die Entwicklung *der linksstehenden Determinanten ch ihren letzten Kolonnen* ergibt einerseits

$$\Psi_{2\nu-1} = \sum_{n=0}^{\nu-1} c_{\nu+n}\,G_n, \qquad \Phi_{2\nu-1} = \sum_{n=0}^{\nu-1} c_{\nu+n+1}\,G_n,$$

nn $G_0, G_1, \ldots, G_{\nu-1}$ die Unterdeterminanten der letzten Kolonne von $_{-1}$ darstellen,

$$(23)\quad \Psi_{2\nu-1}=\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{\nu-1} & c_\nu \\ c_2 & c_3 & \dots & c_\nu & c_{\nu+1} \\ \vdots & & & & \\ c_\nu & c_{\nu+1} & \dots & c_{2\nu-2} & c_{2\nu-1} \end{vmatrix}, \qquad G_0=(-1)^{\nu-1}\begin{vmatrix} c_2 & c_3 & \dots & c_\nu \\ & & & \\ c_\nu & c_{\nu+1} & \dots & c_{2\nu-1} \end{vmatrix}$$

anderseits, mit Hilfe der Unterdeterminanten $H_0, H_1, \dots, H_{\nu-1}$ der letzt Kolonne von

$$(23a)\quad (-1)^{\lambda+1}\Psi_{2\nu,\lambda}=\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{\nu-\lambda-1} & c_{\nu-\lambda+1} & \dots & c_{\nu-1} & c_\nu \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{\nu-\lambda} & c_{\nu-\lambda+2} & \dots & c_\nu & c_{\nu+1} \\ \vdots & & & & & & & \\ c_{\nu-1} & c_\nu & \dots & c_{2\nu-\lambda-2} & c_{2\nu-\lambda} & \dots & c_{2\nu-2} & c_{2\nu-1} \end{vmatrix},$$

die Formeln

$$(-1)^{\lambda+1}\Psi_{2\nu,\lambda}=\sum_{n=0}^{\nu-1} c_{\nu+n}H_n, \qquad (-1)^{\lambda+1}\Phi_{2\nu,\lambda}=\sum_{n=0}^{\nu-1} c_{\nu+n+1}H_n.$$

Dadurch transformiert sich die linke Seite von (21) in

$$(24)\qquad (-1)^{\lambda+1}\sum_{n=0}^{\nu-1}\sum_{m=0}^{\nu-1} c_{\nu+n}c_{\nu+m+1}(G_nH_m-G_mH_n).$$

Nun figurieren die $G$ und $H$, höchstens vom Vorzeichen abgesehen, au als Unterdeterminanten der rechts in (21) stehenden Determinante $\Psi_{2\nu}$

$$\Psi_{2\nu-2}=\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{\nu-\lambda-1} & c_{\nu-\lambda} & c_{\nu-\lambda+1} & \dots & c_{\nu-1} \\ c_1 & c_2 & \dots & c_{\nu-\lambda} & c_{\nu-\lambda+1} & c_{\nu-\lambda+2} & \dots & c_\nu \\ \vdots & & & & & & & \\ c_{\nu-1} & c_\nu & \dots & c_{2\nu-\lambda-2} & c_{2\nu-\lambda-1} & c_{2\nu-\lambda} & \dots & c_{2\nu-2} \end{vmatrix},$$

und zwar ist, unter $\Omega_{nh}$ die zum Schnittelement der $(n+1)$-ten Zeile u $(h+1)$-ten Kolonne[3]) gehörige Unterdeterminante von $\Psi_{2\nu-2}$ verstande

$$(25)\qquad G_n=(-1)^{\nu+1}\Omega_{n0}, \qquad H_n=(-1)^{\lambda+1}\Omega_{n,\nu-\lambda}.$$

Man gelangt daher für den Ausdruck (24), d. h. die linke Seite der z beweisenden Gleichung (21) zu dem Werte

$$(-1)^{\nu+1}\sum_{n=0}^{\nu-1}\sum_{m=0}^{\nu-1} c_{n+\nu}c_{\nu+m+1}(\Omega_{n0}\Omega_{m,\nu-\lambda}-\Omega_{m0}\Omega_{n,\nu-\lambda}).$$

Nach dem *Minorentheorem*[4]), angewandt auf $\Psi_{2\nu-2}$, ist aber hier $\Omega_{n0}\Omega_{m,\nu-\lambda}-\Omega_{m0}\Omega_{n,\nu-\lambda}$ gleich dem *Produkte* von $\Psi_{2\nu-2}$ mal jen Determinante $(\nu-2)$-ten Grades, die aus $\Psi_{2\nu-2}$ entsteht, wenn man sowo

[3]) Nunmehr aber die Kolonnen, gleichwie im folgenden, von links gezählt.

[4]) Vgl. z. B. Gordan-Kerschensteiner, Vorlesungen über Invariantentheor 1 (Leipzig 1885), S. 53, 93.

$(n+1)$-te und $(m+1)$-te Zeile, als auch die erste und $(\nu-\lambda+1)$-te
onne unterdrückt, mit dem Vorzeichen $(-1)^{n+m+\nu-\lambda}$ bei $n<m$, mit
n entgegengesetzten bei $n>m$ versehen.

Man braucht jetzt nur rechts in (21) die Determinante

$$\Psi_{2\nu+1,\lambda+1}=(-1)^{\lambda}\begin{vmatrix} c_1 & \cdots & c_{\nu-\lambda-1} & c_{\nu-\lambda+1} & \cdots & c_{\nu-1} & c_\nu & c_{\nu+1} \\ c_2 & \cdots & c_{\nu-\lambda} & c_{\nu-\lambda+2} & \cdots & c_\nu & c_{\nu+1} & c_{\nu+2} \\ \vdots & & & & & & & \\ c_\nu & \cdots & c_{2\nu-\lambda-2} & c_{2\nu-\lambda} & \cdots & c_{2\nu-2} & c_{2\nu-1} & c_{2\nu} \end{vmatrix}$$

h den Elementenpaaren ihrer vorletzten und letzten Kolonne zu ent-
keln, wobei als Faktor des Paares $c_{\nu+n}c_{\nu+1+m}$ genau dieselbe soeben
eführte Determinante $(\nu-2)$-ten Grades mal $(-1)^{\lambda+n+m+1}$ für $n<m$
l $(-1)^{\lambda+n+m}$ für $n>m$ auftritt, um die Gleichheit der beiden Seiten
(21) einzusehen.

II. Im zweiten Falle, $\varkappa=2\nu+1$, hat man für (19) zu schreiben:

)
$$\Psi_{2\nu}\Phi_{2\nu+1,\lambda}-\Phi_{2\nu}\Psi_{2\nu+1,\lambda}=\Psi_{2\nu-1}\Psi_{2\nu+2,\lambda+1}.$$

n den hier in Relation gebrachten Determinanten besitzen $\Psi_{2\nu}$, $\Phi_{2\nu}$,
$_{+2,\lambda+1}$ den Grad $\nu+1$, die übrigen den Grad $\nu$.

Zum Beweise von (27) entwickelt man $\Psi_{2\nu}$ und $\Phi_{2\nu}$ nach ihrer
$-\lambda+1)$-ten Kolonne mit dem Kopfelement $c_{\nu-\lambda}$:

)
$$\Psi_{2\nu}=\sum_{n=0}^{\nu}c_{\nu-\lambda+n}L_n,\quad \Phi_{2\nu}=\sum_{n=0}^{\nu}c_{\nu-\lambda+n}M_n.$$

dann wird die linke Seite in (27):

a)
$$\sum_{n=0}^{\nu}c_{\nu-\lambda+n}(L_n\Phi_{2\nu+1,\lambda}-M_n\Psi_{2\nu+1,\lambda}),$$

och verschwindet für $n=0$ das Summationselement, weil $\Psi_{2\nu+1,\lambda}$ mit
$1)^{\nu+1}L_0$, $\Phi_{2\nu+1,\lambda}$ mit $(-1)^{\nu+1}M_0$ zusammenfällt, die Summierung
ibt also nur von $n=1$ bis $\nu$ zu erstrecken.

Nun figurieren die Unterdeterminanten $L$, $M$ von $\Psi_{2\nu}$, $\Phi_{2\nu}$ auch
solche von

$-1)^{\lambda}\Psi_{2\nu+2,\lambda+1}=$

b)
$$\begin{vmatrix} c_0, & \ldots, & c_{\nu-\lambda-1}, & c_{\nu-\lambda+1}, & \ldots, & c_\nu, & c_{\nu+1}, \\ c_1, & \ldots, & c_{\nu-\lambda}, & c_{\nu-\lambda+2}, & \ldots, & c_{\nu+1}, & c_{\nu+2}, \\ \vdots & & & & & & \\ c_\nu, & \ldots, & c_{2\nu-\lambda-1}, & c_{2\nu-\lambda+1}, & \ldots, & c_{2\nu}, & c_{2\nu+1} \end{vmatrix}.$$

nn bezeichnet man rechts die zum Schnittelement der $(n+1)$-ten
le und $(h+1)$-ten Kolonne gehörige Unterdeterminante mit $U_{nh}$,
ist

)
$$L_n=(-1)^{\lambda}U_{n\nu},\quad M_n=(-1)^{\lambda-1}U_{n,\nu-1},$$

daher findet man für den Ausdruck (28a), d. h. die linke Seite der beweisenden Gleichung (27), die Form

$$(30) \qquad (-1)^{\nu} \sum_{n=1}^{\nu} c_{\nu-\lambda+n} (U_{n\nu} U_{0,\nu-1} - U_{0\nu} U_{n,\nu-1}).$$

Entwickelt man jetzt rechts in (27) die Determinante $\Psi_{2\nu-1}$ nach Kolonne mit dem Kopfelement $c_{\nu-\lambda+1}$:

$$(31) \qquad \Psi_{2\nu-1} = \sum_{n=0}^{\nu-1} c_{\nu-\lambda+1+n} K_n = \sum_{n=1}^{\nu} c_{\nu-\lambda+n} K_{n-1},$$

so sieht man, daß zum Beweise von (27) die Verifikation der Gleichung

$$(32) \qquad (-1)^{\nu} (U_{n\nu} U_{0,\nu-1} - U_{0\nu} U_{n,\nu-1}) = K_{n-1} \Psi_{2\nu+2,\lambda+1}$$

genügt. Nach dem vorerwähnten Minorensatz, angewendet auf die Determinante (28b) ist aber $U_{n\nu} U_{0,\nu-1} - U_{0\nu} U_{n,\nu-1}$ gleich dem *Produkt* dieser Determinante $(-1)^{\lambda} \Psi_{2\nu+2,\lambda+1}$ mal derjenigen Determinante $(\nu-1)$-ten Grades, welche aus ihr durch Unterdrückung sowohl der ersten und $(n+1)$-ten Zeile als der $\nu$-ten und $(\nu+1)$-ten Kolonne hervorgeht, mit dem Zeichen $(-1)^{n+1}$ versehen. Andererseits ist $K_{n-1}$ rechts in (32) gleich ebendieser Determinante $(\nu-1)$-ten Grades mal $(-1)^{\nu-\lambda+n-1}$, wie mit (32) bewiesen erscheint.

Bezüglich der Determinanten von der Form $\Psi$, $\Phi$ oder allgemeiner von der Form

$$(33) \qquad F = \begin{vmatrix} c_{\lambda_0}, & c_{\lambda_1}, & \dots, & c_{\lambda_\nu} \\ c_{\lambda_0+1}, & c_{\lambda_1+1}, & \dots, & c_{\lambda_\nu+1} \\ c_{\lambda_0+2}, & c_{\lambda_1+2}, & \dots, & c_{\lambda_\nu+2} \\ \vdots & & & \\ c_{\lambda_0+\nu}, & c_{\lambda_1+\nu}, & \dots, & c_{\lambda_\nu+\nu} \end{vmatrix}$$

mit irgendwelchen ganzen positiven Zahlen $\lambda_0, \lambda_1, \dots$ größer oder gleich Null, gelangt außerdem noch, in § 2, der folgende Satz zur Anwendung:

(34) Nennt man $F_\mu$ diejenige Determinante, welche aus $F$ durch Erhöhung der Indizes der Elemente der $(\mu+1)$-*ten Kolonne* um 1 entsteht, hingegen $\bar{F}$ die durch Erhöhung der Indizes in der *letzten Zeile* entstehende, so folgt

$$\bar{F} = F_0 + F_1 + \dots + F_\nu.$$

Diesen Satz beweist man durch Schluß von $\nu$ auf $\nu+1$. Es seien $F$ und $\bar{F}$ nach den Elementen der letzten Zeile entwickelt:

$$(35) \qquad F = \sum_{\varkappa=0}^{\nu} c_{\lambda_\varkappa+\nu} E_\varkappa, \quad \bar{F} = \sum_{\varkappa=0}^{\nu} c_{\lambda_\varkappa+\nu+1} E_\varkappa,$$

n lassen sich, wenn $E_{\varkappa\mu}$ jene Determinante bezeichnet, welche aus $E_\varkappa$ steht, wenn die Indizes der Elemente der $\mu+1$-ten Kolonne von $E_\varkappa$ 1 erhöht werden, offenbar $F_0$, $F_1$, ..., nach der letzten Zeile entkelt, durch die Formel

$$F_\mu = \sum_{\varkappa=0}^{\mu-1} c_{\lambda_\varkappa+\nu} E_{\varkappa,\mu-1} + c_{\lambda_\mu+\nu+1} E_\mu + \sum_{\varkappa=\mu+1}^{\nu} c_{\lambda_\varkappa+\nu} E_{\varkappa\mu}$$

stellen. Bei $\mu = 0$ fällt der erste Term rechts weg, bei $\mu = \nu$ der letzte. Bildet man daher entsprechend (34) die Summe der $F_\mu$ von $\mu = 0$ $\nu$, so ist der mittlere Term $\sum_{\mu=0}^{\nu} c_{\lambda_\mu+\nu+1} E_\mu$ gemäß (35) gleich $\bar{F}$, während den übrigen Termen, die unter Vertauschung der Summationsfolge

$$\sum_{\varkappa=0}^{\nu-1} \sum_{\mu=\varkappa+1}^{\nu} c_{\lambda_\varkappa+\nu} E_{\varkappa,\mu-1} + \sum_{\varkappa=1}^{\nu} \sum_{\mu=0}^{\varkappa-1} c_{\lambda_\varkappa+\nu} E_{\varkappa\mu}$$

chrieben werden können, $c_{\lambda_\varkappa+\nu}$ den Faktor

$$\sum_{\mu=\varkappa+1}^{\nu} E_{\varkappa,\mu-1} + \sum_{\mu=0}^{\varkappa-1} E_{\varkappa\mu} = \sum_{\mu=0}^{\nu-1} E_{\varkappa\mu}$$

weist, welcher Ausdruck, *wenn der Satz* (34) *bereits als gültig für* 1 *statt* $\nu$ *angenommen wird*, mit der aus $E_\varkappa$ durch Erhöhung der izes in der letzten *Zeile von* $E_\varkappa$ entstehenden Determinante $\bar{E}_\varkappa$ zumenfallen muß, daher ist

$$\sum_{\mu=0}^{\nu} F_\mu = \bar{F} + \sum_{\varkappa=0}^{\nu} c_{\lambda_\varkappa+\nu} \bar{E}_\varkappa,$$

die rechtsstehende Summe identisch Null, weil sie mit der zwei gleiche en enthaltenden Determinante

$$\begin{vmatrix} c_{\lambda_0}, & c_{\lambda_1}, & \dots, & c_{\lambda_\nu} \\ \vdots & \vdots & & \\ c_{\lambda_0+\nu-2}, & c_{\lambda_1+\nu-2}, & \dots, & c_{\lambda_\nu+\nu-2} \\ c_{\lambda_0+\nu}, & c_{\lambda_1+\nu}, & \dots, & c_{\lambda_\nu+\nu} \\ c_{\lambda_0+\nu}, & c_{\lambda_1+\nu}, & \dots, & c_{\lambda_\nu+\nu} \end{vmatrix}$$

reinstimmt, wenn man diese nach ihrer *letzten* Zeile entwickelt.

## § 2.

Bezüglich der Koeffizienten der vorgelegten Potenzreihe werde jetzt enommen, daß sie die Eigenschaft (7) besitzen, wie bei der Taylorn Reihe oder bei der Lagrangeschen Potenzreihe (11) für die Wurzel $\eta$ $f(\eta) = 0$

$$\eta - y = -\frac{f(y)}{f'(y)} \sum_{\varkappa=0}^{\infty} c_\varkappa(y) f(y)^\varkappa \tag{39}$$

mit Koeffizienten $c_\varkappa(y)$, deren Rekursion gemäß jener für die $h$, vgl. (1

$$c_\varkappa(y) = -\frac{1}{\varkappa+1}\frac{d}{dy}\frac{c_{\varkappa-1}(y)}{f'(y)}, \quad c_0(y) = 1 \tag{39a}$$

lautet, so daß hier die Funktionen $\sigma_\varkappa(y)$, $\tau_\varkappa(y)$ die Werte aufweise

$$\sigma_\varkappa(y) = -(\varkappa+2) f'(y), \quad \tau_\varkappa(y) = \frac{f''(y)}{f'(y)}, \tag{39b}$$

oder bei der Potenzreihe von $\eta$ nach Potenzen von $\frac{f(y)}{f'(y)^2}$, wenn

$$c_\varkappa(y) = \frac{\omega_\varkappa(y)}{f'(y)^{2\varkappa}}$$

gesetzt wird:

$$\left\{\begin{aligned} &\eta - y = -\frac{f(y)}{f'(y)} \sum_{\varkappa=0}^{\infty} \omega_\varkappa(y) \frac{f(y)^\varkappa}{f'(y)^{2\varkappa}}, \\ &\omega_\varkappa'(y) = \sigma_\varkappa(y)\,\omega_{\varkappa+1}(y) + \tau_\varkappa(y)\,\omega_\varkappa(y), \\ &\sigma_\varkappa(y) = -\frac{\varkappa+2}{f'(y)}, \quad \tau_\varkappa(y) = (2\varkappa+1)\frac{f''(y)}{f'(y)}. \end{aligned}\right. \tag{40}$$

Eine elementare Ableitung der Reihe (10) findet man übrigens, we man vorerst eine Funktion $u$ zweier unabhängig-veränderlichen $x$, $y$ dur die Gleichung $f(y) - f(y+u) = x$ definiert, aus den durch partie Differentiation nach $x$ und $y$ gewonnenen Gleichungen

$$-f'(y+u)\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad f'(y) - f'(y+u)\left(1 + \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

$f'(y+u)$ eliminiert und so die Eigenschaft von $u$:

$$f'(y)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + 1 = 0,$$

nachweist, woraus, solange $u$ in Gestalt einer Potenzreihe $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} h_\varkappa(y)$ vorausgesetzt werden darf, welche gliedweise Differentiation nach $y$ stattet, die Bedingungen (10) für die $h$ resultieren.

Um den Satz (12), der unter den Voraussetzungen (7) gilt, dur vollständige Induktion beweisen zu können, bedarf es jedoch einer v allgemeinerten Formulierung desselben:

(41) Besitzen die Größen $c_\varkappa = c_\varkappa(y)$ die in (7) angegebene Eigenscha so ist der Differentialquotient der mit Hilfe dieser Größen $c$ bildeten Determinante (33) gegeben durch

$$\frac{dF}{dy} = \sum_{\mu=0}^{\nu} \sigma_{\lambda_\mu+\nu} F_\mu + \varrho F, \quad \varrho = \sum_{\mu=0}^{\nu} \tau_{\lambda_\mu+\mu}.$$

Zum Beweise entwickelt man $F$, wie in (35), nach den Elementen letzten Zeile $F = \sum_{\mu=0}^{\nu} c_{\lambda_\mu+\nu} E_\mu$ und differentiiert nach $y$, so folgt ge- (7):

$$\frac{dF}{dy} = \sum_{\mu=0}^{\nu} (\sigma_{\lambda_\mu+\nu} c_{\lambda_\mu+\nu+1} + \tau_{\lambda_\mu+\nu} c_{\lambda_\mu+\nu}) E_\mu + \sum_{\mu=0}^{\nu} c_{\lambda_\mu+\nu} \frac{dE_\mu}{dy},$$

darf aber, *weil der Satz* (41) *bereits für* $\nu - 1$ *statt* $\nu$ *als bewiesen enommen wird*,

$$\frac{dE_\mu}{dy} = \sum_{\varkappa=0}^{\mu-1} \sigma_{\lambda_\varkappa+\nu-1} E_{\mu\varkappa} + \sum_{\varkappa=\mu+1}^{\nu} \sigma_{\lambda_\varkappa+\nu-1} E_{\mu,\varkappa-1} + \left[\sum_{\varkappa=0}^{\mu-1} \tau_{\lambda_\varkappa+\varkappa} + \sum_{\varkappa=\mu+1}^{\nu} \tau_{\lambda_\varkappa+\varkappa-1}\right] E_\mu$$

en, wo $E_{\mu\varkappa}$ genau wie in § 1 aus $E_\mu$ gebildet wird, indem man die zes der $(\varkappa+1)$-ten Kolonne von $E_\mu$ um 1 erhöht.

Der auf die $\tau$ bezügliche Teil von $\frac{dF}{dy}$ in (42) ist daher

$$\sum_{\mu=0}^{\nu} c_{\lambda_\mu+\nu} E_\mu \left[\tau_{\lambda_\mu+\nu} + \sum_{\varkappa=0}^{\mu-1} \tau_{\lambda_\varkappa+\varkappa} + \sum_{\varkappa=\mu+1}^{\nu} \tau_{\lambda_\varkappa+\varkappa-1}\right]$$

wegen der aus (7a) folgenden Gleichungen:

$$\tau_{\lambda_\varkappa+\varkappa-1} = \tau_{\lambda_\varkappa+\varkappa} - \tau, \quad \sum_{\varkappa=\mu+1}^{\nu} \tau_{\lambda_\varkappa+\varkappa-1} = \sum_{\varkappa=\mu+1}^{\nu} \tau_{\lambda_\varkappa+\varkappa} - (\nu-\mu)\tau,$$

$$\tau_{\lambda_\mu+\nu} = \tau_{\lambda_\mu+\mu} + (\nu-\mu)\tau,$$

er gleich $\left[\sum_{\mu=0}^{\nu} c_{\lambda_\mu+\nu} E_\mu\right]\left[\sum_{\varkappa=0}^{\nu} \tau_{\lambda_\varkappa+\varkappa}\right] = F\varrho$, das heißt identisch mit dem ts in (41) auf die $\tau$ bezüglichen Teile.

Es bleibt also noch nachzuweisen, daß die übrigen, von $\sigma$ abhängigen ne in (42), nach Substituierung von (43) für $\frac{dE_\mu}{dy}$:

$$\sum_{\mu=0}^{\nu} \sigma_{\lambda_\mu+\nu} c_{\lambda_\mu+\nu+1} E_\mu + \sum_{\mu=0}^{\nu} c_{\lambda_\mu+\nu} \left[\sum_{\varkappa=0}^{\mu-1} \sigma_{\lambda_\varkappa+\nu+1} E_{\mu\varkappa} + \sum_{\varkappa=\mu+1}^{\nu} c_{\lambda_\varkappa+\nu-1} E_{\mu,\varkappa-1}\right]$$

Wert $\sum_{\mu=0}^{\nu} \sigma_{\lambda_\mu+\nu} F_\mu$ aus (41) repräsentieren. Mit diesem letzteren Aus- k aber kann man nach (36) die Umformung

$$\sum_{=0}^{\nu} \sigma_{\lambda_\varkappa+\nu} F_\varkappa = \sum_{\varkappa=0}^{\nu} \sigma_{\lambda_\varkappa+\nu} \left[\sum_{\mu=0}^{\varkappa-1} c_{\lambda_\mu+\nu} E_{\mu,\varkappa-1} + c_{\lambda_\varkappa+\nu+1} E_\varkappa + \sum_{\mu=\varkappa+1}^{\nu} c_{\lambda_\mu+\nu} E_{\mu\varkappa}\right]$$

und eine weitere durch Vertauschung der Summationsfolge in den Doppelsummen

$$(45\,a)\qquad \sum_{\mu=0}^{\nu-1} c_{\lambda_\mu+\nu} \sum_{\varkappa=\mu+1}^{\nu} \sigma_{\lambda_\varkappa+\nu} E_{\mu,\varkappa-1} + \sum_{\varkappa=0}^{\nu} \sigma_{\lambda_\varkappa+\nu} c_{\lambda_\varkappa+\nu+1} E_{\varkappa}$$

$$+ \sum_{\mu=1}^{\nu} c_{\lambda_\mu+\nu} \sum_{\varkappa=0}^{\nu-1} \sigma_{\lambda_\varkappa+\nu} E_{\mu\varkappa}$$

vornehmen. Der erste Term in (45) und der mittlere in (45a) sind identisch, so daß in der Differenz des Ausdrucks (45) minus dem Ausdruck (45a), geordnet nach den Größen $c_{\lambda_\mu+\nu}$, als Faktor von $c_{\lambda_\mu}$ wenn man berücksichtigt, daß $\sigma_{\lambda_\varkappa+\nu} - \sigma_{\lambda_\varkappa+\nu-1} = -\sigma$ nach (7a) *unabhängig* von $\varkappa$ ist,

$$-\sigma\left[\sum_{\varkappa=0}^{\mu-1} E_{\mu\varkappa} + \sum_{\varkappa=\mu+1}^{\nu} E_{\mu,\varkappa-1}\right] = -\sigma \sum_{\varkappa=0}^{\nu-1} E_{\mu\varkappa}$$

resultiert. Wieder ist, wie in § 1, die Summe $\sum_{\varkappa=0}^{\nu-1} E_{\mu\varkappa} = \bar{E}_\mu$ und die Summe $\sum_{\mu=0}^{\nu} c_{\lambda_\mu+\nu} \bar{E}_\mu = 0$, wonach endlich die Gleichheit der Ausdrücke (45) und (45a), daher der Satz (41) bewiesen erscheint.

Durch die *Spezialisierungen* $\lambda_\mu = \mu$ und $\lambda_\mu = \mu + 1$ erhält man aus der Determinante $F$ die ursprünglich eingeführten Determinanten $\Psi_0$, $\Psi_{2\nu+1}$, vgl. (2), für welche aber die Indizeserhöhung nur bei der *letzten Kolonne* ein von Null verschiedenes Resultat, nämlich $\Phi_{2\nu}$ resp. $\Phi_{2\nu+1}$ gemäß (4), liefert, weil sonst, durch Indizeserhöhung in einer früheren Kolonne, die Entstehung zweier gleichen Kolonnen bewirkt wird. Damit nimmt der Satz (41) die einfache Gestalt an

$$\frac{d\Psi_\varkappa}{dy} = \sigma_\varkappa \Phi_\varkappa + \varrho_\varkappa \Psi_\varkappa,$$

und hierin besitzt, je nachdem $\varkappa = 2\nu$ oder $2\nu+1$, also $\lambda_\mu = \mu$ oder $\mu+1$ ist, die Größe $\varrho_\varkappa = \sum_{\mu=0}^{\nu} \tau_{\lambda_\mu+\mu}$ den Wert

$$\sum_{\mu=0}^{\nu} \tau_{2\mu} = (\nu+1)\tau_\nu \quad \text{oder} \quad \sum_{\mu=0}^{\nu} \tau_{2\mu+1} = (\nu+1)\tau_{\nu+1},$$

im Einklang mit Satz (12).

In dem Beispiel der Potenzreihe (40) für die Wurzel $\eta$ einer Gleichung $f(\eta) = 0$ wird

$$\varrho_{2\nu} = (\nu+1)(2\nu+1)\frac{f''(y)}{f'(y)}, \qquad \varrho_{2\nu+1} = (\nu+1)(2\nu+3)\frac{f''(y)}{f'(y)}.$$

er für *jedes* $\varkappa$

$$\frac{\varrho_\varkappa}{\sigma_\varkappa} = -\frac{\varkappa+1}{2} f''(y),$$

die Gleichungen (13), (14) erhalten die Form

$$\begin{cases} \Psi_{\varkappa+1}\Psi_{\varkappa-2} = f'(y)\left[\frac{1}{\varkappa+1}\Psi_\varkappa\Psi'_{\varkappa-1} - \frac{1}{\varkappa+2}\Psi'_\varkappa\Psi_{\varkappa-1}\right] + \frac{1}{2}f''(y)\Psi_\varkappa\Psi_{\varkappa-1} \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{\varkappa+1} = -\frac{f'(y)}{\varkappa+2}\frac{\Psi'_\varkappa}{\Psi_\varkappa} + \frac{\varkappa+1}{2}f''(y). \end{cases}$$

## § 3.

Hervorzuheben bezüglich des Beispiels der Lagrangeschen Reihe (10) noch, daß genau so, wie aus ihr das *Newtonsche Näherungsverfahren* Berechnung einer Wurzel $\eta$ von $f(\eta) = 0$ entspringt, indem man die $n+1$ Terme dieser Reihe

$$\mathfrak{F}_n(y) = \sum_{\varkappa=0}^{n} \frac{(-1)^\varkappa h_\varkappa(y) f(y)^\varkappa}{\varkappa!} = y - \frac{f(y)}{f'(y)} \sum_{\varkappa=0}^{n-1} c_\varkappa(y) f(y)^\varkappa$$

*Iterationsfunktion* benutzt, um $\eta$ als Grenzwert der Folge $y, y_1, y_2, \ldots$

$$y_1 = \mathfrak{F}_n(y), \quad y_2 = \mathfrak{F}_n(y_1), \quad y_3 = \mathfrak{F}_n(y_2), \quad \ldots$$

ustellen, auch der $n$-te Näherungsbruch des korrespondierenden Kettenhs (wenn man die Form (39) zugrunde legt)

$$\mathfrak{G}_n(y) = y - \frac{f(y)}{f'(y)}\left[\frac{\alpha_0|}{|1} - \frac{\alpha_1 f(y)|}{|1} - \frac{\alpha_2 f(y)|}{|1} - \ldots - \alpha_{n-1} f(y)\right]$$

Iterationsfunktion gewählt werden kann. Das Verhalten der beiden ktionen $\mathfrak{F}_n(y)$, $\mathfrak{G}_n(y)$ ist infolge des $n$-fachen Verschwindens von $y) = (-1)^n h'_n(y) f(y)^n / n!$, daher auch[5]) von $\mathfrak{G}'_n(y)$ für $y = \eta$ gleich-, insoweit es den *Konvergenzgrad* betrifft.

Außer der linearen Newtonschen Iteration $\mathfrak{F}_1(y) = \mathfrak{G}_1(y) = y - \frac{f(y)}{f'(y)}$ mt also, für $n = 2$, die linear gebrochene

$$\mathfrak{G}_2(y) = y - \frac{f(y)f'(y)}{f'(y)^2 - \frac{1}{2}f(y)f''(y)}$$

Betracht, welche allerdings mit der linearen, angewandt auf die Gleig $f(\eta)f'(\eta)^{-\frac{1}{2}} = 0$ koinzidiert usf.

Einige Ausführungen hierüber sollen in anderem Zusammenhange voracht werden. Nur bezüglich der namentlich für reelle Iterationen

[5]) Weil die Differenz $f_n(y) - \mathfrak{G}_n(y)$ ja $(n+1)$ fach für $y = \eta$ verschwinden muß.

wichtigen Berechnung des Differentialquotienten $\mathfrak{G}_n'(y)$ sei erwähnt, man für diesen ebenfalls eine explizite Formel finden kann, vgl. (59).

Setzt man $\frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$ für den Näherungsbruch rechts in (49), also

$$(50) \qquad \mathfrak{G}_n = y - \frac{R_{n-1}}{S_{n-1}} \qquad (R_{n-1} = fP_{n-1}, \quad S_{n-1} = f'Q_{n-1}$$

so folgt durch Differentiation nach $y$

$$(51) \qquad \frac{d\mathfrak{G}_n}{dy} = \frac{S_{n-1}^2 - S_{n-1}R_{n-1}' + R_{n-1}S_{n-1}'}{S_{n-1}^2},$$

und der Zähler des Ausdrucks rechts besitzt, weil $P_{n-1}$, $Q_{n-1}$ von Graden $E\left(\frac{n-1}{2}\right)$, $E\left(\frac{n}{2}\right)$ in $f$, somit $R_{n-1}$, $S_{n-1}$ von den Grad $1 + E\left(\frac{n-1}{2}\right)$, $E\left(\frac{n}{2}\right)$ sind, wie leicht nachzurechnen, den Grad $n$ in Er soll aber durch $f^n$ *teilbar* sein, woraus man sofort, wenn die Näherun zähler und -nenner

$$(52) \qquad \begin{cases} P_{2\nu} = p_\nu f^\nu + p_{\nu 1} f^{\nu-1} + \ldots, & P_{2\nu-1} = \bar{p}_\nu f^{\nu-1} + \bar{p}_{\nu 1} f^{\nu-2} + \ldots \\ Q_{2\nu} = q_\nu f^\nu + q_{\nu 1} f^{\nu-1} + \ldots, & Q_{2\nu-1} = \bar{q}_\nu f^\nu + \bar{q}_{\nu 1} f^{\nu-1} + \ldots \end{cases}$$

entwickelt gedacht werden, für $S_{n-1}^2 \frac{d\mathfrak{G}_n}{dy} / f^n$, je nach $n = 2\nu + 1$ u $n = 2\nu$ den Wert

$$-(f'q_\nu)\frac{dp_\nu}{dy} + p_\nu \frac{d(f'q_\nu)}{dy}$$

respektive

$$(f'\bar{q}_\nu)^2 - (f'\bar{q}_\nu)\frac{d\bar{p}_\nu}{dy} + \bar{p}_\nu \frac{d(f'\bar{q}_\nu)}{dy}.$$

erhält. Statt dessen kann geschrieben werden

$$(53) \qquad \begin{cases} \dfrac{Q_{n-1}^2}{f^n}\dfrac{d\mathfrak{G}_n}{dy} = \dfrac{p_\nu^2}{f'^2}\dfrac{d}{dy}\dfrac{f'q_\nu}{p_\nu} & \text{für } n = 2\nu+1 \\ \qquad\qquad = \bar{q}_\nu^2\left[1 - \dfrac{d}{dy}\dfrac{\bar{p}_\nu}{f'\bar{q}_\nu}\right] & \text{für } n = 2\nu, \end{cases}$$

in welcher Darstellung auf der rechten Seite nur die Koeffizienten d *höchsten* Potenzen von $f$ in den $P$, $Q$ auftreten, nämlich[6])

---

[6]) Vgl. z. B. Perron, a. a. O. S. 301, nach leichter Modifikation der Bezeichnungsweise: für $a_1$, $a_{\varkappa+1}$, $A_n$, $B_n$ dort ist hier $\alpha_0$, $-\alpha_\varkappa$, $xP_{n-1} + Q_{n-1}$, $Q_{n-1}$ gese

$$\begin{cases} p_\nu = (-1)^\nu \alpha_0 \alpha_2 \dots \alpha_{2\nu} \\ q_\nu = (-1)^\nu \alpha_2 \alpha_4 \dots \alpha_{2\nu} \left[1 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + \frac{\alpha_1 \alpha_3}{\alpha_2 \alpha_4} + \dots + \frac{\alpha_1 \dots \alpha_{2\nu-1}}{\alpha_2 \dots \alpha_{2\nu}}\right] \\ \bar{p}_\nu = (-1)^{\nu+1} \alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_{2\nu-1} \left[\frac{\alpha_0}{\alpha_1} + \frac{\alpha_0 \alpha_2}{\alpha_1 \alpha_3} + \dots + \frac{\alpha_0 \alpha_2 \dots \alpha_{2\nu-2}}{\alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_{2\nu-1}}\right] \\ \bar{q}_\nu = (-1)^\nu \alpha_1 \alpha_3 \dots \alpha_{2\nu-1}. \end{cases}$$

Für $n = 2, 3$ verifiziert man ohne weiteres vermöge der Eigenaften (39 a, b), welche den Koeffizienten $c$ der Potenzreihe (39) zuammen, daß die rechte Seite der für $\mathfrak{G}_n'(y)$ erhaltenen Gleichung (53) $(n+1)\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ übereinstimmt.

Allgemein beweist man den Satz

$$\frac{d\mathfrak{G}_n}{dy} = \frac{(n+1)\alpha_0 \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n f^n}{Q_{n-1}^2}$$

endermaßen: Die Substitution des Wertes $\Psi_\varkappa \Psi_{\varkappa-3} / \Psi_{\varkappa-1} \Psi_{\varkappa-2}$ für $\alpha_\varkappa$, sprechend (3), führt für die Größen (54) zu

$$\begin{cases} p_\nu = (-1)^\nu \frac{\Psi_{2\nu}}{\Psi_{2\nu-1}}, \qquad \frac{q_\nu}{p_\nu} = \sum_{\lambda=0}^{\nu} \frac{\Psi_{2\lambda-1}^2}{\Psi_{2\lambda-2} \Psi_{2\lambda}} \\ \bar{q}_\nu = (-1)^{\nu-1} \frac{\Psi_{2\nu-1}}{\Psi_{2\nu-2}}, \quad \frac{\bar{p}_\nu}{\bar{q}_\nu} = -\sum_{\lambda=0}^{\nu-1} \frac{\Psi_{2\lambda}^2}{\Psi_{2\lambda-1} \Psi_{2\lambda+1}}, \end{cases}$$

urch bekommt die rechte Seite von (53) die Form

$$\left(\frac{\Psi_{2\nu}}{\Psi_{2\nu-1}}\right)^2 \frac{1}{f'^2} \frac{d}{dy}\left(f' \sum_{\lambda=0}^{\nu} \frac{\Psi_{2\lambda-1}^2}{\Psi_{2\lambda-2} \Psi_{2\lambda}}\right) \qquad \text{für } n = 2\nu+1$$

$$\left(\frac{\Psi_{2\nu-1}}{\Psi_{2\nu-2}}\right)^2 \left[1 + \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{f'} \sum_{\lambda=0}^{\nu-1} \frac{\Psi_{2\lambda}^2}{\Psi_{2\lambda-1} \Psi_{2\lambda+1}}\right)\right] \quad \text{für } n = 2\nu.$$

dies gleich $(n+1)\alpha_0 \alpha_1 \dots \alpha_n = (n+1)\Psi_n / \Psi_{n-2}$ sein, so erfordert Anwendbarkeit des Schlusses von $\nu$ auf $\nu+1$ das Bestehen von

$$\begin{cases} \frac{1}{f'^2} \frac{d}{dy} \frac{f' \Psi_{2\nu+1}^2}{\Psi_{2\nu} \Psi_{2\nu+2}} = (2\nu+4) \frac{\Psi_{2\nu+3} \Psi_{2\nu+1}}{\Psi_{2\nu+2}^2} - (2\nu+2) \frac{\Psi_{2\nu+1} \Psi_{2\nu-1}}{\Psi_{2\nu}^2}, \\ \frac{d}{dy} \frac{\Psi_{2\nu}^2}{f' \Psi_{2\nu-1} \Psi_{2\nu+1}} = (2\nu+3) \frac{\Psi_{2\nu+2} \Psi_{2\nu}}{\Psi_{2\nu+1}^2} - (2\nu+1) \frac{\Psi_{2\nu} \Psi_{2\nu-2}}{\Psi_{2\nu-1}^2}, \end{cases}$$

che Gleichungen man in der Tat mit Hilfe der Gleichungen (13), anendet auf das hier in Rede stehende Beispiel (39),

$$(58)\qquad \begin{cases} \Psi_{\varkappa+1}\Psi_{\varkappa-2} = -\dfrac{\Psi_{\varkappa}'\Psi_{\varkappa-1}}{(\varkappa+2)f'} + \dfrac{\Psi_{\varkappa}\Psi_{\varkappa-1}'}{(\varkappa+1)f'} + r_{\varkappa}\Psi_{\varkappa}\Psi_{\varkappa-1} \\ r_{2\nu-1} = -r_{2\nu} = \dfrac{1}{2\nu+1}\cdot\dfrac{f''}{2f'^2} \end{cases}$$

verifiziert. (Man bildet die Gleichung (58) für $\varkappa = 2\nu+2$ und $\varkappa = 2\nu+$ multipliziert mit $(2\nu+4)/\Psi_{2\nu+2}$ resp. $(2\nu+2)/\Psi_{2\nu}$ und subtrahiert, gelangt man zur ersten Gleichung (57). Und zur andern, wenn man ( für $\varkappa = 2\nu+1$ und $\varkappa = 2\nu$ bildet, mit $(2\nu+3)/\Psi_{2\nu+1}$ resp. $(2\nu+1)/\Psi_{2}$ multipliziert und subtrahiert.) Somit ist bewiesen:

Nennt man $P_{n-1}/Q_{n-1}$ den $n$-ten Näherungsbruch des mit der tenzreihe $\sum_{\varkappa=0}^{\infty} c_{\varkappa}(y)f(y)^{\varkappa}$ in (39) korrespondierenden Kettenbruchs setzt $\mathfrak{G}_n = y - \dfrac{f(y)}{f'(y)}\dfrac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}$, so ist

$$(59)\qquad \frac{d\mathfrak{G}_n}{dy} = \frac{(n+1)f^n}{Q_{n-1}^2}\,\frac{\Psi_n}{\Psi_{n-2}},$$

wo die $\Psi$ nach (2) sich durch die Koeffizienten $c$ ausdrücken.

(Eingegangen am 14. Juli 1921.)

# ber eine fundamentale Eigenschaft der Invarianten einer allgemeinen binären Form.

Von

A. Ostrowski in Hamburg und I. Schur in Berlin.

Wendet man auf die Variablen $x$, $y$ der binären Form

$$f(x, y) = a_0 x^n + \binom{n}{1} a_1 x^{n-1} y + \binom{n}{2} a_2 x^{n-2} y^2 + \ldots + a_n y^n$$

allgemeine lineare homogene Transformation

$$x = \alpha\xi + \gamma\eta, \qquad y = \beta\xi + \delta\eta$$

so entsteht eine neue Form

$$\varphi(\xi, \eta) = a_0' \xi^n + \binom{n}{1} a_1' \xi^{n-1} \eta + \binom{n}{2} a_2' \xi^{n-2} \eta^2 + \ldots + a_n' \eta^n.$$

Hierbei erscheinen die $a_\varkappa'$ als allein durch $s$ bestimmte lineare Formen $a_\lambda$

$$a_\varkappa' = \sum_{\lambda=0}^{n} t_{\varkappa\lambda} a_\lambda \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, n).$$

Die so durch $s$ erzeugte lineare Transformation in $n+1$ Variablen t man vielfach die zu $s$ gehörende induzierte Transformation; sie soll $T(s)$ bezeichnet werden[1]). Diese Transformationen bilden eine mit linearen Gruppe der Substitutionen $s$ isomorphe Gruppe $\mathfrak{G}$, die wir folgenden die *Fundamentalgruppe* der (binären) Invariantentheorie en wollen. In der Tat kann man ja die gesamte Theorie der rianten binärer Formen als die Lehre von den Invarianten der Gruppe $\mathfrak{G}$ ssen.

Es war nun von Interesse, diese Gruppe unabhängig von der Trans- ation der $x, y$ allein als lineare Gruppe in $n+1$ Variablen zu kenn-

[1]) Diese Transformation ist im wesentlichen gleichbedeutend mit der von urwitz, Zur Invariantentheorie, Mathematische Annalen 43 (1893), S. 381–404, chteten Potenztransformation $P_n(s)$.

zeichnen. Eine solche Charakterisierung ergibt sich aus einem Satz, Ostrowski unter anderen Ergebnissen in seiner Arbeit *Über eine Eigenschaft der Diskriminanten und Resultanten binärer Formen*[2]) gestellt hat, und der hier folgendermaßen ausgesprochen werden kann

*Die Gruppe $\mathfrak{G}$ läßt sich definieren als die Gesamtheit aller linea Transformationen der $a_\varkappa$, welche die Diskriminante $D$ der Form $f(x$ ungeändert lassen*[3]).

Es erscheint uns nun merkwürdig, daß dieser Satz nicht umgek zur Kennzeichnung der Diskriminante innerhalb der Gesamtheit Invarianten $F$ von $f(x, y)$ dienen kann, daß vielmehr der weit allgemei Satz gilt:

I. *Jede (nicht konstante) Invariante $F$ der Form $f(x, y)$ läßt a den Transformationen der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ keine weiteren linea Transformationen der $a_\varkappa$ zu. Eine Ausnahme bilden nur für gerades $n = 2\nu > 2$ die Potenzen der quadratischen Invariante*

$$J = a_0 a_n - \binom{n}{1} a_1 a_{n-1} + \binom{n}{2} a_2 a_{n-2} - \cdots \pm \binom{n}{\nu-1} a_{\nu-1} a_{\nu+1} \mp \frac{1}{2}\binom{n}{\nu}$$

Daß $\mathfrak{G}$ die größte *kontinuierliche* Gruppe linearer Transformatio ist, welche eine Invariante $F$ (abgesehen von dem Ausnahmefall) zul folgt bereits aus einem schönen Resultat von Herrn G. Kowalewsk auf das schon Ostrowski am Schluß der oben zitierten Arbeit hingewie hat. Der Beweis unseres Satzes I wird auch in einem wichtigen Pun von einem Hilfssatz (Satz III) Gebrauch machen, der implicite schon Herrn Kowalewski vorkommt.

Dieser Beweis wird im folgenden mit durchaus elementaren H mitteln erbracht werden, wobei auch aus der Invariantentheorie nur sehr leicht zu beweisende Tatsache benutzt wird, daß jede Invaria einer binären Form gewissen drei partiellen Differentialgleichungen geni Der Zusammenhang unserer Überlegung mit der Theorie der kontinu lichen Gruppen ist aber naturgemäß ein sehr enger. Man kann gerad sagen, daß wir uns einer älteren Auffassungsweise von Lie anschließ bei der die infinitesimalen Operationen lediglich als die linken Sei gewisser Differentialgleichungen erscheinen.

---

[2]) Mathematische Annalen 79 (1919), S. 360–387.

[3]) Wenn wir in der vorliegenden Arbeit sagen, eine Form bleibe bei e linearen Transformation ungeändert oder lasse eine solche zu, so sehen wir von ei eventuell hinzutretenden konstanten Faktor ab. Ferner schließen wir lineare Tr formationen mit verschwindender Determinante von der Betrachtung aus.

[4]) Über die projektive Gruppe der Normkurve und eine charakteristische Ei schaft des sechsdimensionalen Raumes, Leipz. Berichte, math.-phys. Klasse 54 (19 S. 371–392.

Unsere Methode führt nicht allein im Falle der Invarianten einer
ären Form zum Ziele. Auch in anderen Fällen erweist sie sich als
uchbar, um die sämtlichen linearen Transformationen zu bestimmen,
eine gegebene Form zuläßt. Beispiele dieser Art, die dem formalen
kül der Potenzreihen entnommen sind und auch an und für sich ein
isses Interesse beanspruchen, behandeln wir in den §§ 5 und 6 dieser
eit.

Der Satz I läßt sich, wie Ostrowski in einigen späteren Arbeiten
er Heranziehung wesentlich tiefer liegender Hilfsmittel vielleicht etwas
ir begrifflichen Charakters darlegen wird, auch auf den Fall mehrerer
ndformen mit beliebig vielen Variablen $x, y, \ldots$ übertragen. In der
liegenden Abhandlung waren wir vor allem bestrebt, den Beweis mög-
st elementar zu führen.

Die drei ersten Paragraphen dieser Arbeit sind in gemeinsamen Be-
echungen beider Autoren entstanden. Die Ausführungen des § 4 rühren
A. Ostrowski, die der §§ 5 und 6 von I. Schur her.

## § 1.

## Der Grundgedanke der Beweismethode.

Für jede Form $F = F(a)$ der Variablen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ setzen wir im
enden überall

$$\frac{\partial F}{\partial a_\nu} = F_\nu \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n).$$

Genügt nun $F$ einer Differentialgleichung von der Gestalt

$$C = \sum_{\varkappa, \lambda}^{n}{}_0 \, c_{\varkappa\lambda} a_\lambda F_\varkappa = 0$$

konstanten Koeffizienten $c_{\varkappa\lambda}$, so betrachten wir die Matrix $C = (c_{\varkappa\lambda})$,
wir stets mit demselben Buchstaben bezeichnen wie die linke Seite
Differentialgleichung.

Eine wichtige Rolle wird nun bei uns die einfache Bemerkung
len:

II. *Genügt $F$ der Differentialgleichung* (1) *und ist $P = (p_{\varkappa\lambda})$ eine
are Transformation, die $F$ ungeändert läßt, so genügt $F$ auch der
erentialgleichung $C_1 = 0$ mit der Koeffizientenmatrix*

$$C_1 = PCP^{-1}$$

Denn aus

$$a'_\varkappa = \sum_{\lambda=0}^{n} p_{\varkappa\lambda} a_\lambda, \qquad F(a') = \gamma \cdot F(a)$$

folgt durch Differentiation nach $a_\varkappa$

$$\gamma F_\varkappa(a) = \sum_{\mu=0}^{n} p_{\mu\varkappa} F_\mu(a').$$

Setzt man nun

$$a_\lambda = \sum_{\nu=0}^{n} p'_{\lambda\nu}\, a'_\nu,$$

so wird

$$\gamma C = \sum_{\varkappa,\lambda} c_{\varkappa\lambda}\, a_\lambda \cdot \gamma F_\varkappa(a) = \sum_{\varkappa,\lambda,\mu,\nu} c_{\varkappa\lambda}\, p'_{\lambda\nu}\, p_{\mu\varkappa} a'_\nu\, F_\mu(a') = 0.$$

Für

$$\sum_{\varkappa,\lambda} p_{\mu\varkappa}\, c_{\varkappa\lambda}\, p'_{\lambda\nu} = c'_{\mu\nu}, \quad \text{d. h.} \quad C_1 = (c'_{\mu\nu})$$

erhält man demnach

$$\sum_{\mu,\nu} c'_{\mu\nu} a'_\nu F_\mu(a') = 0.$$

Das liefert aber den Satz II, wenn man noch beachtet, daß die $a'_\nu$ v einander unabhängig sind und daher durch die $a_\nu$ ersetzt werden könn

Handelt es sich nun darum, die Gruppe $\mathfrak{F}$ aller Transformationen zu bestimmen, welche die gegebene Form $F$ ungeändert lassen, so w zuweilen folgende Schlußweise gute Dienste leisten: Kennt man eine *Ba* der Schar $\mathfrak{D}$ aller Differentialgleichungen der Form (1) für die gegeb Funktion $F$, d. h. ein System

$$C_1 = 0,\ C_2 = 0, \ldots, C_k = 0$$

von linear unabhängigen Differentialgleichungen, aus denen sich jede and Differentialgleichung von $\mathfrak{D}$ linear zusammensetzen läßt, so ergibt Satz II, daß für jede Transformation $P$ der Gruppe $\mathfrak{F}$ Gleichungen v der Gestalt

$$PC_\varkappa P^{-1} = \sum_{\lambda=1}^{k} d_{\varkappa\lambda} C_\lambda \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

gelten müssen. Hierbei ist jede dieser Gleichungen als eine Relati zwischen Matrizen aufzufassen. Bezeichnet man nun die rechte Seite v (2) mit $C'_\varkappa$,[5]) so lassen sich diese Gleichungen auch in der Form

$$PC_\varkappa = C'_\varkappa P \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

schreiben und liefern nun gewisse *lineare* Bedingungen für die zu bestimmend Koeffizienten $p_{\alpha\beta}$ der Substitution $P$, im Gegensatz zu der komplizierte Gleichung, welche die Invarianz von $F$ gegenüber $P$ zum Ausdruck brin

[5]) Das Zeichen $M'$ für die zu einer Matrix $M$ gehörende transponierte Mat wird in dieser Arbeit nirgends benutzt.

beachten ist allerdings, daß in (3) die $C_\varkappa$ als bekannt anzusehen sind, $C'_\varkappa$ aber nicht. Diese Matrizen werden aber in vielen Fällen von so iellem Bau sein, daß die Diskussion des Problems, alle $P$ zu bestimmen, Ende geführt werden kann.

Im Falle einer Invariante $F$ der binären Form $f(x, y)$ wird nun Basis der zugehörigen Schar $\mathfrak{D}$ durch den oben erwähnten Hilfssatz Herrn Kowalewski geliefert:

III. *Für jede (nicht konstante) Invariante $F$ der binären Form , $y$) bilden die drei Differentialgleichungen*

$$\begin{cases} C_1 = a_0 F_1 + 2a_1 F_2 + \ldots + n a_{n-1} F_n = 0 \\ C_2 = n a_1 F_0 + (n-1) a_2 F_1 + \ldots + a_n F_{n-1} = 0 \\ C_3 = n a_0 F_0 + (n-2) a_1 F_1 + \ldots + (n-2n) a_n F_n = 0 \end{cases}$$

*Basis der zu $F$ gehörenden Schar $\mathfrak{D}$. Eine Ausnahme tritt nur $n > 2$ ein, wenn $F$ eine Potenz der (in der Einleitung erwähnten) dratischen Invariante $J$ ist.*

Von diesem Satz, dessen Beweis im § 3 in einer gegenüber dem walewskischen Beweis etwas vereinfachten und unseren Betrachtungen r angepaßten Darstellung erbracht werden wird, soll schon jetzt rauch gemacht werden.

## § 2.

## Beweis des Satzes I.

Um diesen Satz zu beweisen, haben wir nur zu zeigen, daß eine stitution $P = (p_{\varkappa\lambda})$, die für die Matrizen $C_\nu$ der drei Differential- chungen (4) Gleichungen der Form

$$PC_\nu = (\varrho_\nu C_1 + \sigma_\nu C_2 + \tau_\nu C_3) P$$

ügt, der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ angehört, d. h. für eine passend ählte Substitution

$$s = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

Form der durch $s$ induzierten Transformation $T(s)$ erhält. Den eis zerlegen wir in eine Reihe einzelner Schritte:

1. Um zu zeigen, daß $P$ zu $\mathfrak{G}$ gehört, genügt es offenbar dies für ndein Produkt $Q = G_1 P G_2$ zu beweisen, wo $G_1$ und $G_2$ in der Gruppe nthalten sind. Wir werden nun $G_1$ und $G_2$ so wählen, daß in $Q = (q_{\varkappa\lambda})$ beiden Elemente $q_{0n}$ und $q_{n0}$ gleichzeitig verschwinden. Hierbei be- en wir uns der drei Transformationen von $\mathfrak{G}$

$$(H_1^{(t)}) \quad a'_\varkappa = t^\varkappa a_0 + \binom{\varkappa}{1} t^{\varkappa-1} a_1 + \binom{\varkappa}{2} t^{\varkappa-2} a_2 + \ldots + a_\varkappa$$

$$(H_2^{(u)}) \quad a'_\varkappa = a_\varkappa + \binom{n-\varkappa}{1} u\, a_{\varkappa+1} + \binom{n-\varkappa}{2} u^2 a_{\varkappa+2} + \ldots + u^{n-\varkappa} \cdot a_n$$

$$(H_3) \quad a'_\varkappa = a_{n-\varkappa},$$

die zu den drei Substitutionen

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}, \qquad s_2 = \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad s_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gehören. Insbesondere bewirkt die linksseitige Multiplikation von $P$ n
$H_3$ eine Umkehrung der Reihenfolge der Zeilen und die rechtsseiti
Multiplikation mit $H_3$ das Analoge für die Kolonnen. Bildet man n
$H_1^{(t)} P$, so tritt an Stelle von $p_{n0}$ der Ausdruck

$$p_{00} t^n + \binom{n}{1} t^{n-1} p_{10} + \ldots + \binom{n}{1} t p_{n-1,0} + p_{n0}.$$

Durch geeignete Wahl von $t$ kann dieser Ausdruck gewiß zu Null gemac
werden, wenn nicht

$$p_{00} = p_{10} = \ldots = p_{n-1,0}$$

ist. In diesem Fall steht aber in $H_3 P$ in der ersten Kolonne an letzt
Stelle eine Null.

Wir können also von vornherein annehmen, daß $p_{n0}$ bereits Null is
Es darf dann vorausgesetzt werden, daß nicht gleichzeitig auch in d
ersten Zeile von $P$

$$p_{00} = p_{01} = \ldots = p_{0,n-1} = 0 \tag{6}$$

ist. Denn ist dies der Fall, so ersetze man $P$ durch $H_3 P = (r_{\varkappa\lambda})$.
dieser Matrix ist nämlich noch $r_{n0} = p_{00} = 0$, aber nicht zugleich

$$r_{00} = r_{01} = \ldots = r_{0,n-1} = 0.$$

Denn dies würde nur bedeuten, daß in $P$ auch

$$p_{n0} = p_{n1} = \ldots = p_{n,n-1} = 0$$

wäre, was zusammen mit (6) das Verschwinden der Determinante von
nach sich ziehen würde.

Bildet man nun $P H_2^{(u)} = (q_{\varkappa\lambda})$, so wird von selbst $q_{n0} = p_{n0}$
und außerdem

$$q_{0n} = p_{00} u^n + p_{01} u^{n-1} + \ldots + p_{0n}.$$

Dieser Ausdruck hängt noch jedenfalls von $u$ ab und kann wieder durc
passende Wahl von $u$ zum Verschwinden gebracht werden.

Wir nehmen daher an, daß in $P = (p_{\varkappa\lambda})$ von vornherein

$$p_{n0} = p_{0n} = 0$$

und werden zunächst zeigen, daß dann $P$ von selbst eine Diagonal-
ix werden muß.

2. Setzen wir in der Formel (5)

$$\varrho_\nu C_1 + \sigma_\nu C_2 + \tau_\nu C_3 = C'_\nu$$

bilden die Matrix $C'_\nu P = (v^{(\nu)}_{\varkappa\lambda})$, so wird, wie man leicht erkennt,

$$v^{(\nu)}_{\varkappa\lambda} = \varrho_\nu\, \varkappa\, p_{\varkappa-1,\lambda} + \sigma_\nu (n - \varkappa)\, p_{\varkappa+1,\lambda} + \tau_\nu (n - 2\varkappa)\, p_{\varkappa\lambda}\,.$$

bei ist $p_{\alpha\beta} = 0$ zu setzen, wenn einer der Indizes negativ oder größer
$n$ wird. Da nun $p_{n0} = 0$ sein soll und nicht alle Elemente $p_{\alpha 0}$ der
en Kolonne von $P$ verschwinden können, so gibt es einen Index $m$
$\leqq m < n$) von der Art, daß $p_{m0}$ als das letzte nicht verschwindende
r den Elementen $p_{\alpha 0}$ erscheint. Die Gleichung $PC_3 = C_3 P$ liefert
insbesondere für die Indizes $\varkappa = m+1$, $\lambda = 0$

$$n\, p_{m+1,0} = \varrho_3 (m+1)\, p_{m0},$$

die beiden anderen in (7) vorkommenden Glieder in unserem Fall
selbst fortfallen. Aus (8) folgt wegen $p_{m+1,0} = 0$, $p_{m0} \neq 0$, daß
$= 0$ sein muß. Ebenso ergibt sich aus $PC_3 = C_3 P$ durch Betrachtung
letzten Kolonne, daß auch $\sigma_3$ verschwinden muß.

3. Die Gleichung (5) hat also für $\nu = 3$ die einfache Form

$$PC_3 = \tau_3 C_3 P,$$

dies liefert

$$(n - 2\lambda)\, p_{\varkappa\lambda} = \tau_3 (n - 2\varkappa)\, p_{\varkappa\lambda}.$$

nun $p_{0\beta} \neq 0$, so wird wegen $p_{0n} = 0$ jedenfalls $\beta < n$ und

$$n - 2\beta = \tau_3 n.$$

$p_{\alpha 0} \neq 0$ wird ebenso wegen $p_{n0} = 0$ auch $\alpha < n$ und

$$n = \tau_3 (n - 2\alpha).$$

e beiden Gleichungen liefern aber

$$n^2 = (n - 2\alpha)(n - 2\beta),$$

nur für $\alpha = \beta = 0$ möglich ist. Zugleich ergibt sich aus (10) $\tau_3 = 1$.
(9) folgt nun unmittelbar, daß für $\varkappa \neq \lambda$ das Element $p_{\varkappa\lambda}$ gleich 0
muß. Die Matrix $P$ ist also in der Tat eine Diagonalmatrix.

4. Für eine solche Matrix $P$ enthält nun $C'_1 = PC_1P^{-1}$ nur in der
en Nebendiagonale unterhalb der Hauptdiagonale von Null verschiedene
nente. Daher muß $C'_1 = \varrho_1 C_1$ werden, und vergleichen wir nun in
Gleichung $PC_1 = \varrho_1 C_1 P$ links und rechts die Elemente, so erhalten
insbesondere $p_{\varkappa\varkappa} = \varrho_1\, p_{\varkappa-1,\varkappa-1}$, also

$$p_{\varkappa\varkappa} = \varrho_1^{\varkappa}\, p_{00}.$$

Eine Diagonalmatrix $P$, deren Elemente $p_{\varkappa\varkappa}$ diese Form haben, läßt s aber, wenn $\alpha$ eine Lösung der Gleichung $\alpha^n = p_{00}$ bedeutet, als die du die Substitution

$$s = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha\varrho_1 \end{pmatrix}$$

induzierte Transformation $T(s)$ auffassen.

## § 3.

## Beweis des Kowalewskischen Hilfssatzes.

Auch den Beweis dieses Satzes, den wir als Satz III bezeichn haben, wollen wir in einer Reihe von einzelnen Schritten führen.

1. Eine Invariante $F$ der binären Form $f(x,y)$ ist jedenfalls e isobare Form der Variablen $a_\nu$. Ist ihr Gewicht gleich $p$, so wird $a_\lambda$ isobar vom Gewichte $p+\lambda-\varkappa$. Genügt daher $F$ einer Differenti gleichung der Form (1), so müssen in $C = \sum c_{\lambda\varkappa} a_\lambda F_\varkappa$ die Teilsumm der Glieder von gleichem Gewicht, d. h. derjenigen mit konstanter Differe $\varkappa - \lambda$ einzeln verschwinden. Wir können uns daher auf die Betrachtu von Gleichungen der Form

$$x_\varkappa a_0 F_\varkappa + x_{\varkappa+1} a_1 F_{\varkappa+1} + \ldots + x_n a_{n-\varkappa} F_n = 0,$$
$$x_0 a_\varkappa F_0 + x_1 a_{\varkappa+1} F_1 + \ldots + x_{n-\varkappa} a_n F_{n-\varkappa} = 0$$

beschränken. Die linksstehenden Ausdrücke bezeichnen wir mit

$$D_\varkappa(x_\nu) = D_\varkappa(x_0, x_1, \ldots, x_n) \quad \text{und} \quad D_{-\varkappa}(x_\nu) = D_{-\varkappa}(x_0, x_1, \ldots, x_n),$$

wobei im ersten Fall $x_0, x_1, \ldots, x_{\varkappa-1}$ und im zweiten Fall $x_{n-\varkappa+1}, \ldots,$ gleich Null zu setzen sind.

Daß $F$ bei der Transformation $a'_\varkappa = a_{n-\varkappa}$ ungeändert bleibt, hat z Folge, daß, wenn $F$ der Differentialgleichung $D_\lambda(x_\nu) = 0$ genügt, au der Ausdruck

$$D^*_\lambda(x_\nu) = D_{-\lambda}(x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, x_0) \qquad (\lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

verschwinden muß.

Jedenfalls genügt $F$, als Invariante von $f(x,y)$, den drei Differentia gleichungen (4) des vorigen Paragraphen. Die früher mit $C_1, C_2, C_3$ b zeichneten Ausdrücke nennen wir jetzt $A$, $B$ und $C$. In den neuen B zeichnungen wird

$$A = D_1(\nu), \qquad B = A^* = D_{-1}(n-\nu), \qquad C = D_0(n-2\nu).$$

Um deutlicher zu machen, daß in $A = D_1(\nu)$ die Werte $\nu < 0$ und $\nu >$ nicht zulässig sind, empfiehlt es sich,

$$A = D_1(k_\nu) \qquad (k_0 = 0,\ k_1 = 1, \ldots,\ k_n =$$

setzen, mit der Festsetzung, daß für $\nu < 0$ und $\nu > n$ $k_\nu$ gleich Null soll.

2. Genügt eine Form $F = F(a)$ den beiden Differentialgleichungen

$$R = \sum_{\varkappa,\lambda}^{n}{}_0 r_{\varkappa\lambda} a_\lambda F_\varkappa = 0, \qquad S = \sum_{\varkappa,\lambda}^{n}{}_0 s_{\varkappa\lambda} a_\lambda F_\varkappa = 0,$$

verschwindet bekanntlich auch der „Klammerausdruck“

$$(R, S) = \sum_{\varkappa,\lambda}^{n}{}_0 a_\lambda F_\varkappa \Big[\sum_{\nu=0}^{n} (r_{\varkappa\nu} s_{\nu\lambda} - s_{\varkappa\nu} r_{\nu\lambda})\Big].$$

ziell wird für $\varkappa, \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, wie eine einfache Rechnung lehrt,

$$(D_\varkappa(x_\nu), D_\lambda(y_\nu)) = D_{\varkappa+\lambda}(x_\nu y_{\nu-\varkappa} - y_\nu x_{\nu-\lambda}),$$

ei alle $x_\alpha, y_\alpha$ für $\alpha < 0$ und $\alpha > n$ durch Nullen zu ersetzen sind.

3. Es sei nun $\mu \leqq n$ der größte positive Index, für den die zu betende Invariante $F$ einer Differentialgleichung $M = D_\mu(x_\nu) = 0$ mit t lauter verschwindenden Koeffizienten $x_\nu$ genügt[6]). Da jedenfalls $D_1(k_\nu) = 0$ ist, so ist $\mu \geqq 1$, und wir werden, wie sich bald zeigen , nur zu zeigen haben, daß abgesehen vom Ausnahmefall $F = J^r$ der x $\mu$ den Wert 1 haben muß.

Zunächst schließen wir die Fälle $\mu = n - 1$ und $\mu = n$ aus.

Auf Grund der Formel (11) wird auch

$$(A, M) = D_{\mu+1}(k_\nu x_{\nu-1} - x_\nu k_{\nu-\mu}) = 0.$$

liefert $k_\nu x_{\nu-1} = x_\nu k_{\nu-\mu}$ oder genauer

$$\mu + 1)\, x_\mu = x_{\mu+1}, \ (\mu+2)\, x_{\mu+1} = 2\, x_{\mu+2}, \ \ldots, \ n\, x_{n-1} = (n-\mu)\, x_n.$$

erhalten also $x_\nu = \binom{\nu}{\mu} x_\mu$. Wählt man $x_\mu = 1$, so kann

$$M = D_\mu(l_\nu) \qquad \left(l_\nu = \binom{\nu}{\mu} \text{ für } \nu = 0, 1, \ldots, n\right)$$

zt werden. Ist insbesondere $\mu = 1$, so wird $M = A$. Zugleich ergibt daß auch keine Differentialgleichung $D_{-\varkappa}(y_\nu) = 0$ für $\varkappa > \mu$ bestehen , weil sonst auch $D_\varkappa(y_{n-\nu}) = 0$ wäre. Für $\varkappa = \mu$ hat man ferner, von einem konstanten Faktor abgesehen wird, nur die eine Gleichung $(l_{n-\nu}) = 0$.

4. Sei $R = D_0(z_\nu) = 0$ eine Differentialgleichung für $F$. Dann auch

$$(R, M) = D_\mu(z_\nu l_\nu - l_\nu z_{\nu-\mu}) = 0.$$

[6]) Mit diesem größten Index $\mu$ operiert auch Herr Kowalewski, l. c.[4]).

Hieraus folgt, da dieser Ausdruck sich von $M$ nur durch einen konstanten Faktor $d$ unterscheiden darf,

$$z_\mu - z_0 = z_{\mu+1} - z_1 = \ldots = z_n - z_{n-\mu} = d. \tag{12}$$

Für $\mu = 1$ erhält man insbesondere

$$z_1 - z_0 = z_2 - z_1 = \ldots = z_n - z_{n-1} = d,$$

also $z_\nu = z_0 + d\nu$. Ist nun früher $C = D_0(n - 2\nu)$, so wird

$$R = \sum_{\nu=0}^{n} z_\nu a_\nu F_\nu = \left(z_0 + \frac{dn}{2}\right) \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu F_\nu - \frac{d}{2} C.$$

Da nun $C = 0$ und $\sum a_\nu F_\nu = mF$ ist, falls $m$ den Grad der homogenen Funktion $F$ bedeutet, so muß $z_0 + \frac{dn}{2} = 0$ sein, d. h. $R$ ist von der Form konst. $C$. Es gibt also für $\mu = 1$, wie zu beweisen ist, im wesentlichen nur die drei Differentialgleichungen $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$. Im folgenden können wir daher $\mu > 1$ annehmen.

5. Neben $M = D_\mu(l_\nu) = 0$ genügt $F$ noch der Differentialgleichung

$$M^* = N = D_{-\mu}(l_{n-\nu}) = 0,$$

also auch der Gleichung

$$(M, N) = D_0(u_\nu) = 0.$$

Hierbei ist

$$u_\nu = l_\nu l_{n-\nu+\mu} - l_{n-\nu} l_{\nu+\mu}$$

zu setzen. Es muß also wegen (12)

$$u_\mu - u_0 = u_{\mu+1} - u_1 = \ldots = u_n - u_{n-\mu} \tag{13}$$

sein.

Ist nun

$$n - q\mu = r \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots, \mu -$$

und bedeutet $\varrho$ eine der Zahlen $0, 1, \ldots, r$, so betrachten wir die Ausdrücke

$$u_{\varkappa\mu+\varrho} = l_{\varkappa\mu+\varrho} l_{n-(\varkappa-1)\mu-\varrho} - l_{(\varkappa+1)\mu+\varrho} l_{n-\varkappa\mu-\varrho} \qquad (\varkappa = 0, 1, \ldots, \tag{14}$$

Bezeichnet man den gemeinsamen Wert der Differenzen (13) mit $w$, so folgt aus

$$u_{\mu+\varrho} - u_\varrho = u_{2\mu+\varrho} - u_{\mu+\varrho} = \ldots = u_{q\mu+\varrho} - u_{(q-1)\mu+\varrho} = w$$

offenbar

$$u_{\varkappa\mu+\varrho} = u_\varrho + \varkappa w. \tag{15}$$

Andererseits liefert aber (14) wegen $n + \mu - \varrho > n$, $(q+1)\mu + \varrho >$

$$\sum_{\varkappa=0}^{q} u_{\varkappa\mu+\varrho} = l_\varrho l_{n+\mu-\varrho} - l_{(q+1)\mu+\varrho} l_{n-q\mu-\varrho} = 0.$$

(15) folgt daher

$$0 = (q+1)\,u_\varrho + \frac{q(q+1)}{2}\,w, \quad \text{d. h.} \quad 2\,u_\varrho = -\,q\,w.$$

$r > 0$ ergibt sich insbesondere $u_0 = u_1$, was wegen

$$u_0 = -\,l_n\,l_\mu, \qquad u_1 = -\,l_{n-1}\,l_{\mu+1}$$

leichung $\binom{n}{\mu} = (\mu+1)\binom{n-1}{\mu}$ oder, was dasselbe ist, $n = (n-\mu)(\mu+1)$

t. Dies führt nur auf den zunächst ausgeschlossenen Fall $\mu = n-1$.
Wir können also annehmen, daß $r = 0$, also $n = q\,\mu$ ist. Für $\varrho = 0$
nun aus (15) und (16)

$$q\,u_{\varkappa\mu} = (q - 2\varkappa)\,u_0.$$

$\varkappa = q-1$ ergibt sich insbesondere, indem man die $l_\alpha$ einführt,

$$2(q-1)\,l_\mu\,l_{q\mu} = q\,l_{2\mu}\,l_{(q-1)\mu}$$

was dasselbe ist,

$$2(q-1)\binom{q\mu}{\mu} = q\binom{2\mu}{\mu}\binom{(q-1)\mu}{\mu}.$$

Eine einfache Umformung liefert

$$-1)\,\frac{(q-1)\mu+1}{(q-2)\mu+1}\cdot\frac{(q-1)\mu+2}{(q-2)\mu+2}\cdots\frac{q\mu}{(q-1)\mu} = q\cdot\frac{\mu+1}{1}\cdot\frac{\mu+2}{2}\cdots\frac{2\mu}{\mu}.$$

$q > 2$ werden nun die Brüche auf der linken Seite kleiner als die
rechenden Brüche auf der rechten Seite. Da nun $\mu > 1$ ist, so
folgen

$$2(q-1)\cdot\frac{q\mu}{(q-1)\mu} > q\cdot\frac{2\mu}{\mu},$$

icht möglich ist.

Der allein noch zu behandelnde Fall $q = 2$, $n = 2\mu$ erledigt sich,
man die Gleichung

$$u_\mu - u_0 = u_{\mu+1} - u_1$$

chtet. Wegen (17) und

$$= l_\mu\,l_n - l_{n-\mu}\,l_{2\mu} = 0, \quad u_{\mu+1} = l_{\mu+1}\,l_{n-1} - l_{n-\mu-1}\,l_{2\mu+1} = l_{\mu+1}\,l_{2\mu-1}$$

sie $l_\mu\,l_{2\mu} = 2\,l_{\mu+1}\,l_{2\mu-1}$ oder

$$\binom{2\mu}{\mu} = 2(\mu+1)\binom{2\mu-1}{\mu},$$

$2 = 2(\mu+1)$, was wieder nicht möglich ist.

. Es bleiben also nur noch die Fälle $\mu = n-1 > 1$ und $\mu = n$ zu
deln.

st zunächst $\mu = n$, so wird

$$M = a_0\,F_n, \qquad M^* = a_n\,F_0.$$

Wir bilden nun mit Hilfe der Formel (11) Schritt für Schritt Klammerausdrücke[7])

$$K_1 = (A, M^*), \quad K_2 = \left(A, \tfrac{1}{2}K_1\right), \quad K_3 = \left(A, \tfrac{1}{3}K_2\right), \ldots.$$

Eine einfache Rechnung liefert in den früheren Bezeichnungen

$$(-1)^\nu K_\nu = D_{\nu-n}\left(\binom{n}{\nu}, -\binom{n}{\nu-1}, \binom{n}{\nu-2}, \ldots, \pm 1, 0, \ldots, 0\right).$$

Da nun alle diese Ausdrücke für unsere Invariante $F$ verschwin müssen, so ergibt sich für $\nu = 0, 1, \ldots, n$

$$\binom{n}{\nu} a_{n-\nu} F_0 - \binom{n}{\nu-1} a_{n-\nu+1} F_1 + \ldots + (-1)^\nu a_n F_\nu = 0.$$

Dies liefert aber

$$F_0 = F_1 = \ldots = F_n = 0, \quad \text{d. h.} \quad F = \text{konst.}$$

7. Für $\mu = n - 1$ wird

$$M = a_0 F_{n-1} + n a_1 F_n, \quad M^* = n a_{n-1} F_0 + a_n F_1.$$

Bildet man wieder die iterierten Ausdrücke $K_\nu$, so wird hier, wie r ebenfalls ohne Mühe erkennt,

$$(-1)^{\nu-1} K_{\nu-1} = D_{\nu-n}\left(\binom{n}{\nu}\nu, -\binom{n}{\nu-1}(\nu-2), \binom{n}{\nu-2}(\nu-4), \ldots\right)$$

Das liefert für $F$ die Differentialgleichungen

$$(18) \qquad \begin{cases} n a_{n-1} F_0 + a_n F_1 = 0 \\ 2\binom{n}{2} a_{n-2} F_0 - 2 a_n F_2 = 0 \\ 3\binom{n}{3} a_{n-3} F_0 - \binom{n}{2} a_{n-2} F_1 - \binom{n}{1} a_{n-1} F_2 + 3 a_n F_3 = 0 \text{ u} \end{cases}$$

Entwickelt man nun $F$ nach fallenden Potenzen von $a_0$, so sei

$$F = a_0^r G_0 + a^{r-1} G_1 + \ldots + G_r.$$

Aus den Gleichungen (18) ergibt sich nun hintereinander

$$\frac{\partial G_0}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial G_0}{\partial a_2} = 0, \ldots, \quad \frac{\partial G_0}{\partial a_{n-1}} = 0.$$

Daher ist $G_0 = \gamma a_n^s$, wobei $\gamma$ eine Konstante bedeutet. Die $n$-te Gleichungen (18) liefert aber noch

$$n a_0 F_0 - (n-2)\binom{n}{1} a_1 F_1 + (n-4)\binom{n}{2} a_2 F_2 - \ldots + (-1)^n (n - 2n) a_n F_n =$$

[7]) Auch hier lehnt sich unser Beweis an den des Herrn Kowalewski an, mit diesen iterierten Klammerausdrücken mehrfach operiert. Wir machen von ih aber im Gegensatz zu Herrn Kowalewski nur in den für die Rechnung beson einfachen Ausnahmefällen $\mu = n$ und $\mu = n - 1$ Gebrauch.

Vergleicht man hier wieder links und rechts die Koeffizienten von $a_0^r$, hält man

$$n r G_0 + n(-1)^{n-1} a_n \frac{\partial G_0}{\partial a_n} = 0,$$

$r + (-1)^{n-1} s = 0$. Folglich muß $n$ eine gerade Zahl und $r = s$ Setzt man $n = 2\nu$ und (wie früher)

$$J = a_0 a_n - \binom{n}{1} a_1 a_{n-1} + \ldots \pm \frac{1}{2}\binom{n}{\nu} a_\nu^2,$$

enügt $J$ und folglich auch jede Potenz von $J$ der Differentialgleichung

$$a_0 \frac{\partial z}{\partial a_{n-1}} + n a_1 \frac{\partial z}{\partial a_n} = 0,$$

uch für unsere Invariante $F$ besteht. Dasselbe gilt daher für

$$F^{(1)} = F - \gamma J^r,$$

es würde sich wieder ergeben, daß, wenn $F^{(1)}$ nicht Null ist, dieser ruck ein Glied der Form $\gamma' a_0^{r'} a_n^{r'}$ enthalten müßte. Hierbei wäre $r' < r$, was der Tatsache widerspricht, daß $F^{(1)}$ eine homogene tion von demselben Grade wie $F$ sein muß. Es muß also in dem $\mu = n - 1$ unsere Invariante $F$ von der Gestalt $\gamma J^r$ sein. Damit er Satz III in allen Teilen bewiesen.

## § 4.

## Eine Folgerung aus dem Satze III.

Schreibt man eine Form $F$ der Variablen $a_\nu$ in der Gestalt

$$F = \sum K a_0^{\alpha_0} a_1^{\alpha_1} \ldots a_n^{\alpha_n}$$

besteht diese Summe aus $k$ verschiedenen Gliedern, so besagt eine rentialgleichung vom Typus

$$x_0 a_0 F_0 + x_1 a_1 F_1 + \ldots + x_n a_n F_n = 0,$$

für jedes der $k$ Glieder von $F$ die Gleichung

$$\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$$

t ist. Dies bedeutet aber, daß die Form $F$ isobar vom Gewichte 0 er Gewichtsbestimmung ist, bei der $a_0$ das Gewicht $x_0$, $a_1$ das Ge- $x_1$ usw. hat. Die Tatsache, daß es, von einem konstanten Faktor sehen, nur eine Differentialgleichung von der Form (19) gibt, der $F$ gt (vom Ausnahmefall abgesehen), besagt also, daß es im wesent- nur eine Gewichtsbestimmung gibt, bei der $F$ isobar vom Ge-

wichte 0 ist. Nun gibt es aber für jede Invariante $F$ bekanntlich wesentlich verschiedene Gewichtsbestimmungen, bei denen sie isoban Gäbe es noch eine dritte Gewichtsbestimmung, die von den beiden kannten unabhängig wäre, und in bezug auf die $F$ isobar wäre, so li sich aus den drei Gewichtsbestimmungen zwei solche herleiten, in b auf die $F$ isobar vom Gewichte 0 wäre. Da dies aber (vom Ausnah fall abgesehen) unmöglich ist, erhalten wir das Resultat:

IV. *Jede Gewichtsbestimmung für die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots$ der binären Form $n$-ten Grades $f(x, y)$, bei der eine Invariante $F$ d Form, die nicht die Gestalt $\gamma J^\nu$ hat, isobar ist, läßt sich aus den be bekannten Gewichtsbestimmungen:*

(I) $x_0 = 1, x_1 = 1, \ldots, x_n = 1$; (II) $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, \ldots, x_n$

*linear zusammensetzen.*

Für einige Invarianten läßt sich dieser Satz auch durch direkte Un suchung ihrer Gewichtseigenschaften bestätigen.

Die Anzahl $N$ der linear unabhängigen Differentialgleichungen (19 genau gleich der Anzahl der linear unabhängigen Lösungen der $k$ linea homogenen Gleichungen (20). Weiß man insbesondere, daß $N$ ist, so darf jedenfalls nicht $k$ kleiner als $(n+1)-1=n$ sein. Die dingung $N=1$ ist nun nach Satz III für jede Invariante $F$ der F $f(x, y)$, abgesehen vom Ausnahmefall, gewiß erfüllt.

Hat aber $F$ die Form $\gamma J^r$ $(r>1)$, wo

$$J = a_0 a_n - \binom{n}{1} a_1 a_{k-1} + \ldots \pm \frac{1}{2}\binom{n}{\frac{n}{2}} a_{\frac{n}{2}}^2$$

ist, so sind hier die einzelnen Glieder unabhängige Funktionen der und daher besteht $J^\nu$ aus genau so vielen Gliedern, wie

$$(z_0 + z_1 + \ldots + z_n)^\nu,$$

wo $z_i$ beliebige Unbestimmten sind, also für $\nu > 1$ aus mehr als $n$ Glied Daher folgt:

IV′. *Eine (nicht konstante) Invariante $F$ der binären Form $n$- Grades $f(x, y)$, die nicht von der Gestalt $\gamma J$ ist, enthält mindesten verschiedene Glieder.*

Dieser einfache Satz scheint in der Literatur nirgends erwähnt sein. Die untere Schranke $n$ für die Gliederanzahl ist vermutlich größere Werte von $n$ noch sehr ungenau.

## § 5.

## Über eine spezielle Klasse von Formen.

Es sei

$$\varphi(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

gegebene Potenzreihe. Ferner sei

$$g(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

Potenzreihe, deren Koeffizienten $a_\nu$ im folgenden als voneinander bhängige Variable angesehen werden sollen. Entwickelt man $\varphi(g)$ ı Potenzen von $x$, so sei

$$\varphi(g) = \varphi_0 + \varphi_1 x + \varphi_2 x^2 + \dots .$$

rin ist $\varphi_n$ eine wohlbestimmte ganze rationale Funktion der Variablen $a_2, \dots, a_n$. Führen wir noch eine Hilfsvariable $a_0$ ein und setzen

$$F = F^{(n)} = a_0^n \varphi_n\left(\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \dots, \frac{a_n}{a_0}\right),$$

wird $F$, sofern $\varphi(x)$ sich nicht auf die Konstante $c_0$ reduziert, eine m in den Variablen $a_0, a_1, \dots, a_n$ vom Grade $n$ und auch vom Gete $n$. Sie genügt daher der Differentialgleichung

$$C_0 = \sum_{\nu=0}^{n} (1-\nu)\, a_\nu F_\nu = 0 \qquad \left(F_\nu = \frac{\partial F}{\partial a_\nu}\right).$$

Wir wollen nun zeigen, daß es unter gewissen Voraussetzungen über Funktion $\varphi(x)$ möglich ist, die Gesamtheit $\mathfrak{F}$ der linearen Transnationen

$$a'_\varkappa = \sum_{\lambda=0}^{n} p_{\varkappa\lambda}\, a_\lambda,$$

he die Form $F$ ungeändert lassen, genau zu bestimmen.

Diese Voraussetzungen lauten:

a) *Die Koeffizienten* $c_1, c_2, \dots$ *sollen sämtlich von* 0 *verschieden sein.*

b) *Für jedes* $n > 2$ *sollen für* $F$ $n-1$ *Differentialgleichungen der* n

$$C_\nu = \gamma_\nu^{(\nu)} a_0 F_\nu + \gamma_{\nu+1}^{(\nu)} a_1 F_{\nu+1} + \dots + \gamma_n^{(\nu)} a_{n-\nu} F_n = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \dots, n-1)$$

*hen, wobei die Konstanten* $\gamma_\lambda^{(\nu)}$ *noch von* $n$ *abhängen können.*

Für welche Funktionen $\varphi(x)$ diese Voraussetzungen gleichzeitig er- sind, soll im nächsten Paragraphen untersucht werden. Zunächst n wir daran, unter der Annahme, daß sie gelten, die Gruppe $\mathfrak{F}$ für $n$ zu bestimmen.

1. Aus a) folgt, daß in der Entwicklung von $F$ jedes Potenzprod $a_0^{\alpha_1} a_1^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n}$ von der Dimension $n$ und vom Gewichte $n$ mit einem Null verschiedenen Koeffizienten versehen vorkommt. Insbesondere das für die Potenzprodukte

$$(23) \qquad a_1^n,\ a_1^{n-2} a_2 a_0,\ a_1^{n-3} a_3 a_0^2, \dots, a_1 a_{n-1} a_0^{n-2},\ a_n a_0^{n-1}.$$

Hieraus folgt zugleich, daß $F_\nu$ ein Glied der Form konst. $a_1^{n-\nu} a_0^{\nu-1}$ expli enthält. Dies hat offenbar zur Folge, daß die Ausdrücke

$$(24) \qquad a_1 F_{\varkappa+1},\ a_2 F_{\varkappa+2}, \dots, a_{n-\varkappa} F_n \qquad (\varkappa = 0, 1, \dots, n -$$

und

$$(25) \qquad a_{\lambda+1} F_1,\ a_{\lambda+2} F_2, \dots, a_n F_{n-\lambda} \qquad (\lambda = 1, 2, \dots, n -$$

bei festem $\varkappa$ bzw. festem $\lambda$ linear unabhängig sind. Insbesondere müs daher in den Differentialgleichungen (22) die Koeffizienten $\gamma_1^{(1)}, \gamma_2^{(2)}, \dots, \gamma_n^{(}$ von Null verschieden sein.

2. Wir behaupten nun, daß unter den von uns gemachten Vora setzungen die $n$ Differentialgleichungen

$$C_0 = 0,\quad C_1 = 0, \dots, C_{n-1} = 0$$

für $n > 2$ in dem früheren Sinne eine Basis der Schar $\mathfrak{D}$ aller für $F$ stehenden Differentialgleichungen der Form

$$(26) \qquad C = \sum_{\varkappa,\lambda=0}^{n} c_{\varkappa\lambda} a_\lambda F_\varkappa = 0$$

bilden (vgl. § 1).

Um dies zu erkennen, genügt es (wie in § 3), nur Differenti gleichungen vom Typus

$$D_\varkappa = D_\varkappa(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0 \quad (\varkappa = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \dots, \pm$$

zu betrachten. Die Fälle $\varkappa = \pm n$ sind gewiß auszuschließen, da sie n auf $F_n = 0$ bzw. $F_0 = 0$ führen würden. Ist ferner $\varkappa$ eine der Zahl $0, 1, \dots, n-1$, also

$$D_\varkappa = x_\varkappa a_0 F_\varkappa + x_{\varkappa+1} a_1 F_{\varkappa+1} + \dots + x_n a_{n-\varkappa} F_n,$$

so muß

$$D_\varkappa = \frac{x_\varkappa}{\gamma_\varkappa^{(\varkappa)}} C_\varkappa$$

werden, da sich sonst eine lineare Beziehung zwischen den Funktionen (2 ergeben würde. Es sei also $\varkappa = -\lambda$ eine der Zahlen $-1, -2, \dots, -(n-$ In

$$D_{-\lambda} = x_0 a_\lambda F_0 + x_1 a_{\lambda+1} F_1 + \dots + x_{n-\lambda} a_n F_{n-\lambda} = 0,$$

muß dann $x_0$ wegen der linearen Unabhängigkeit der Funktionen (2

Null verschieden sein. Man bilde nun durch Anwendung der Klammer-
ation die Differentialgleichung

$$\Delta_0^{(\lambda)} = (C_\lambda, D_{-\lambda}) = D_0(u_0, u_1, \ldots, u_n) = 0,$$

$$u_\nu = \gamma_\nu^{(\lambda)} x_{\nu-\lambda} - x_\nu \gamma_{\nu+\lambda}^{(\lambda)}$$

etzen ist; hierbei hat man unter $\gamma_\alpha^{(\lambda)}$ für $\alpha < \lambda$ oder $\alpha > n$ der Wert
zu verstehen. Nach dem schon Bewiesenen müßte sich $\Delta_0^{(\lambda)}$ von $C_0$
um einen konstanten Faktor unterscheiden. In $\Delta_0^{(\lambda)}$ ist aber die
me aller Koeffizienten gleich Null, in $C_0$ ist diese Summe aber gleich

$$s = \sum_{\nu=0}^{n} (1-\nu) = (n+1)\left(1 - \frac{n}{2}\right),$$

für $n > 2$ gewiß von Null verschieden. Daher müßten alle $u_\nu$ ver-
inden. Dies widerspricht aber wegen $u_0 = -x_0 \gamma_\lambda^{(\lambda)}$ der Annahme,
$x_0 \neq 0$ sein soll.

3. Bezeichnen wir wie bei früheren Gelegenheiten die zur Differential-
hung $C_\nu = 0$ gehörende Koeffizientenmatrix ebenfalls mit $C_\nu$, so wird

$$C_0 = ((1-\alpha)\, e_{\alpha\beta}), \quad C_1 = (\gamma_\alpha^{(1)} e_{\alpha,\beta+1}), \quad C_2 = (\gamma_\alpha^{(2)} e_{\alpha,\beta+2}), \ldots,$$

i $e_{\alpha\beta}$ gleich 1 oder 0 zu setzen ist, je nachdem $\alpha = \beta$ oder $\alpha \neq \beta$
Die Matrix $P = (p_{\alpha\beta})$ einer Transformation der zu bestimmenden
pe $\mathfrak{F}$ hat nun, wie aus dem unter 2. Bewiesenen folgt, die Eigen-
t, daß

$$P C_\nu P^{-1} = C_\nu' \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1)$$

lineare Verbindung von $C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}$ darstellt, also gewiß eine
iecksmatrix" wird, d. h. eine Matrix, die oberhalb der Hauptdiagonale
r Nullen enthält. Wir behaupten nun, daß auch $P$ eine solche
cksmatrix sein muß.

Es sei nämlich

$$C_0' = P C_0 P^{-1} = \varrho_0 C_0 + \varrho_1 C_1 + \ldots + \varrho_{n-1} C_{n-1}.$$

ist eine zu $C_0$ ähnliche Matrix, ihre Spur ist demnach gleich der
$s = \Sigma(1-\nu)$ von $C_0$. Die Spur der rechts stehenden Matrix ist
gleich $\varrho_0 s$. Aus $s \neq 0$ folgt daher $\varrho_0 = 1$. Man schreibe nun die
hung (27) in der Form

$$P C_0 - C_0 P = (\varrho_1 C_1 + \varrho_2 C_2 + \ldots + \varrho_{n-1} C_{n-1})\, P$$

ezeichne das allgemeine Element der rechts stehenden Matrix mit $q_{\alpha\beta}$.
ntsprechende Element links hat, wie man leicht erkennt, den Wert
$\beta)\, p_{\alpha\beta}$. Beachtet man nun, daß $\varrho_1 C_1 + \ldots + \varrho_{n-1} C_{n-1}$ eine Dreiecks-

matrix ist, die in der Hauptdiagonale lauter Nullen enthält, so er sich zunächst $q_{0\beta} = 0$. Das liefert

$$p_{01} = p_{02} = \ldots = p_{0n} = 0.$$

Weiß man nun schon, daß $p_{\alpha\beta}$ für $\alpha < \nu$ und $\beta > \alpha$ gleich Null so wird auch

$$q_{\nu,\nu+1} = q_{\nu,\nu+2} = \ldots = q_{\nu,n} = 0.$$

Daher müssen auch die entsprechenden Elemente $p_{\alpha\beta}$ verschwinden. $\alpha < \beta$ sind also in der Tat alle $p_{\alpha\beta}$ gleich Null.

4. Um nun die Gleichung (28) weiter zu diskutieren, empfiehlt sich, in folgender Weise vorzugehen. Man zerlege $P_1$ nach den Neb diagonalen $\Delta_\nu$, d. h. man schreibe $P$ in der Form

$$P = P_0 + P_1 + \ldots + P_n,$$

wobei

$$P_\nu = (p_{\nu\alpha}\, e_{\alpha,\beta+\nu})$$

in der Nebendiagonale $\Delta_\nu$ dieselben Elemente wie $P$, sonst aber lau Nullen enthält. Zerlegt man nun die in (28) links und rechts auftretend Matrizen in derselben Weise und beachtet, daß

$$P_\nu C_0 - C_0 P_\nu = \nu P_\nu$$

wird, so zerfällt (28) in die $n$ Gleichungen

$$(29) \qquad \begin{cases} P_1 = \varrho_1 C_1 P_0 \\ 2P_2 = \varrho_1 C_1 P_1 + \varrho_2 C_2 P_0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ nP_n = \varrho_1 C_1 P_{n-1} + \varrho_2 C_2 P_{n-2} + \ldots + \varrho_n C_n P_0, \end{cases}$$

wobei aber $C_n = 0$ zu setzen ist.

5. Wir benutzen nun einen Satz, der der Lieschen Theorie e nommen ist, aber auch direkt sehr leicht bewiesen werden kann:

*Genügt die Form $F$ der Differentialgleichung* (26) *mit der Koef zientenmatrix $C$, so bleibt $F$ für jeden Wert des Parameters $\xi$ bei linearen Transformation*

$$S(\xi) = e^{\xi C} = E + \frac{\xi}{1!} C + \frac{\xi^2}{2!} C^2 + \ldots$$

*ungeändert*[8]).

In unserem Fall liefern insbesondere die Differentialgleichungen $C_\nu =$ für $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$ wohlbestimmte Transformationen $S_\nu(\xi_\nu)$, die

[8]) Vgl. H. F. Baker, On the Exponential Theorem for a Simple Transit Continuous Group, and the Calculation of the Finite Equations from the Constant Structure, Proceedings of the London Math. Soc. **34** (1902), S. 91–127.

e Eigenschaft besitzen: $S_\nu(\xi_\nu)$ läßt die Variablen $a_0, a_1, \ldots, a_{\nu-1}$ un-
lert und führt $a_\nu$ in $\gamma_\nu^{(\nu)}\xi_\nu a_0 + a_\nu$ über. Bildet man nun

$$(\xi_1)P = P^{(1)},\quad S_2(\xi_2)P^{(1)} = P^{(2)},\quad \ldots,\quad S_{n-1}(\xi_{n-1})P^{(n-2)} = P^{(n-1)},$$

ann man Schritt für Schritt $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ so wählen, daß in
$^{1)} = (r_{\alpha\beta})$ die Elemente $r_{10}, r_{20}, \ldots, r_{n-1,0}$ gleich Null werden. Nehmen
von vornherein an, $P$ selbst habe schon diese Eigenschaft, so enthält
sondere für $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$ die Matrix $P_\nu$ in der ersten Kolonne
r Nullen. Beachtet man nun, daß in der ersten Kolonne von $C_\nu P_0$
nicht verschwindende Element $\gamma_\nu^{(\nu)} p_{00}$ auftritt, so erhält man aus den
1 ersten der Gleichungen (29) hintereinander

$$\varrho_1 = 0,\quad \varrho_2 = 0,\quad \ldots,\quad \varrho_{n-1} = 0.$$

n wird aber zugleich

$$P_1 = 0,\quad P_2 = 0,\quad \ldots,\quad P_{n-1} = 0,\quad P_n = 0.$$

Matrix $P$ wird also eine Diagonalmatrix.

6. Als isobare Form läßt $F$ jedenfalls die Transformationen

$$a_\varkappa' = \varrho\, a_\varkappa$$

$$a_\varkappa' = \sigma^\varkappa a_\varkappa$$

Setzt man nun

$$P = A(p_{00})\, B\left(\frac{p_{11}}{p_{00}}\right) Q,$$

hält die Transformation $Q$ der zu $F$ gehörenden Gruppe $\mathfrak{F}$ die Gestalt

$$a_\varkappa' = \tau_\varkappa\, a_\varkappa,$$

i insbesondere $\tau_0 = \tau_1 = 1$ wird. Da aber unsere Form $F$ die Potenz-
ukte (23) explizite enthält, so kann sie bei der Transformation $Q$
dann ungeändert bleiben, wenn alle $\tau_\varkappa$ gleich 1 werden.

Unsere Diskussion hat nun folgendes Resultat ergeben:

V. *Sind für die Potenzreihe $\varphi(x)$ die Voraussetzungen* a) *und* b)
*lt, so ist für jedes $n > 2$ die Gruppe $\mathfrak{F}$ der linearen Trans-
ationen, welche die durch die Gleichung* (21) *bestimmte Form $F$
ändert lassen, identisch mit der $(n+1)$-gliedrigen kontinuierlichen
pe, die durch die Transformationen*

$$A(\varrho),\quad B(\sigma),\quad S_1(\xi_1),\quad S_2(\xi_2),\quad \ldots,\quad S_{n-1}(\xi_{n-1})$$

*gt wird.*

Zu beachten ist hierbei, daß man zur Erzeugung der Gruppe $\mathfrak{F}$ nicht
endig die Transformationen $S_\nu$ zu berechnen braucht. Es genügt, an
e der $S_\nu$ irgendwelche $n-1$ Transformationen $T_\nu$ der Gruppe $\mathfrak{F}$ zu

kennen, die folgende Eigenschaften haben: Die Koeffizienten von $T_\nu$ s ganze rationale Funktionen des Parameters $\xi_\nu$, und ferner läßt $T_\nu$ Variablen $a_0, a_1, \ldots, a_{\nu-1}$ ungeändert, während $a_\nu$ in $\alpha_\nu \xi_\nu a_0 + a_\nu$ üb geführt wird. Hierbei sollen die Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\nu-1}$ von N verschieden sein.

## § 6.

## Fortsetzung der Diskussion.

Wir gehen nun dazu über, die Gesamtheit der Potenzreihen $\varphi($ auf die unsere bisherigen Betrachtungen anwendbar sind, genauer zu stimmen.

VI. *Die einzigen Potenzreihen $\varphi(x)$, für welche die Voraussetzun* a) *und* b) *des vorigen Paragraphen erfüllt sind, werden erhalten, dem man*

$$\varphi(x) = a + bx + c\Phi(dx) \tag{30}$$

*setzt, wobei $\Phi(x)$ eine der Funktionen*

$$e^x, \quad (1+x)^\mu, \quad \log(1+x), \quad (1+x)\log(1+x) \tag{31}$$

*bedeutet. Die Konstanten $a, b, c, d$ unterliegen hierbei nur den B dingungen*

$$c \neq 0, \quad d \neq 0, \quad b + cd\Phi'(0) \neq 0.$$

*Für $\Phi(x) = (1+x)^\mu$ ist außerdem noch zu verlangen, daß $\mu$ keine a Zahlen $0, 1, 2, \ldots$ sein soll.*

In den früheren Bezeichnungen wird nämlich

$$\varphi(g) = \sum_{n=0}^{\infty} a_0^{-n} F^{(n)}(a_0, a_0 a_1, \ldots, a_0 a_n) x^n. \tag{32}$$

Setzt man nun

$$\varphi'(g) = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \lambda c_\lambda g^{\lambda-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) x^n \qquad (\psi_0 = c_1 \tag{33}$$

so folgt für $\nu > 0$ aus (32) durch Differentiation nach $a_\nu$

$$x^\nu \varphi'(g) = \sum_{n=0}^{\infty} a_0^{-n+1} F_\nu^{(n)}(a_0, a_0 a_1, \ldots, a_0 a_n) x^n.$$

Das liefert, wenn wieder $n$ festgehalten und $F^{(n)} = F$ gesetzt wird,

$$F_\nu(a_0, a_1, \ldots, a_n) = a_0^{n-1} \psi_{n-\nu}\left(\frac{a_1}{a_0}, \frac{a_2}{a_0}, \ldots, \frac{a_n}{a_0}\right).$$

Verlangen wir nun für jedes $n > 1$, daß $n-1$ Differentialgleichunge der Form (22) für $F$ bestehen sollen, so ist das gleichbedeutend mit d

erung, daß die Funktionen $\psi'_n$ für jedes $m \geqq 1$ einer in den Variablen $_2, \ldots$ identischen Gleichung von der Gestalt

$$k_0 \psi'_m + k_1 a_1 \psi'_{m-1} + k_2 a_2 \psi'_{m-2} + \ldots + k_m a_m \psi'_0 = 0 \qquad (k_0 \neq 0)$$

gen sollen, wobei die $k_n$ noch von $m$ abhängen können.
Für $n \geqq 4$ enthält nun $\psi'_n$ insbesondere die Glieder

$$(n+1)\, c_{n+1} a_1^n, \qquad 2\binom{n}{2} c_n a_1^{n-2} a_2, \qquad 3\binom{n-1}{3} c_{n-1} a_1^{n-4} a_2^2.$$

Vergleicht man nun in (34) links und rechts die Koeffizienten von $a_1^{m-2} a_2$ und $a_1^{m-4} a_2^2$, so ergibt sich für $m \geqq 4$

$$(m+1)\, k_0 c_{m+1} + m\, k_1 c_m = 0,$$

$$2\binom{m}{2} k_0 c_m + 2\binom{m-1}{2} k_1 c_{m-1} + (m-1)\, k_2 c_{m-1} = 0,$$

$$3\binom{m-1}{3} k_0 c_{m-1} + 3\binom{m-2}{3} k_1 c_{m-2} + 2\binom{m-2}{2} k_2 c_{m-2} = 0.$$

r muß die Determinante

$$\begin{vmatrix} (m+1)\, c_{m+1}, & m\, c_m, & 0 \\ 2\binom{m}{2} c_m, & 2\binom{m-1}{2} c_{m-1}, & (m-1)\, c_{m-1} \\ 3\binom{m-1}{3} c_{m-1}, & 3\binom{m-2}{3} c_{m-2}, & 2\binom{m-2}{2} c_{m-2} \end{vmatrix}$$

n Null sein. Setzt man nun

$$c_n = \frac{\gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_n}{n!} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

efert dies nach einer einfachen Umformung die Rekursionsformel

$$\gamma_{m+1} = 2\gamma_m - \gamma_{m-1} \qquad (m \geqq 4).$$

us folgt aber, wenn unter $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ die Zahlen

$$\alpha = \gamma_1, \qquad \beta = \gamma_2, \qquad \gamma = \gamma_3, \qquad \delta = \gamma_3 - \gamma_4$$

anden werden, für $n \geqq 3$

$$\gamma_n = \gamma - (n-3)\,\delta,$$

$$x) = c_0 + \frac{\alpha x}{1!} + \frac{\alpha\beta}{2!} x^2 + \alpha\beta \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\gamma(\gamma-\delta)(\gamma-2\delta)\ldots(\gamma-(n-3)\delta)}{n!} x^n$$

un $\delta = 0$, so wird

$$\varphi(x) = c_0 - \frac{\alpha\beta}{\gamma^2} + \alpha\left(1 - \frac{\beta}{\gamma}\right) x + \frac{\alpha\beta}{\gamma^2} e^{\gamma x}.$$

Für $\delta \neq 0$ wird aber

$$\varphi''(x) = \alpha\beta(1+\delta x)^{\frac{\gamma}{\delta}}.$$

Entsprechend den drei zu berücksichtigenden Fällen

$$(\gamma+2\delta)(\gamma+\delta) \neq 0, \quad \gamma+2\delta = 0, \quad \gamma+\delta = 0$$

erhält man hieraus durch zweimalige Integration für $\varphi(x)$ die drei übrig
im Satz VI angegebenen Formen.

Wir haben nun umgekehrt zu zeigen, daß für jede Funktion $\varphi$
von der Form (30) die zugehörigen Funktionen $\psi_n$ der Variablen $a_1, a_2, \ldots$
Relationen von der Gestalt (34) genügen. Hierbei ist folgendes zu
achten. Geht man von $\varphi(x)$ zu einer Funktion

$$\varphi_1(x) = a + bx + c\varphi(dx)$$

über und setzt entsprechend der Gleichung (33)

$$\varphi_1'(g) = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) x^n,$$

so wird

$$\chi_0 = b + cdc_1, \quad \chi_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = cd \cdot \psi_n(da_1, da_2, \ldots, da_n).$$

Genügen daher für ein gegebenes $m$ die Ausdrücke $\psi_n$ der Relation (34
so wird

$$k_0\chi_m + dk_1 a_1 \chi_{m-1} + \ldots + dk_{m-1} a_{m-1}\chi_1 + \frac{dk_m a_m c_1}{b+cdc_1}\chi_0 = 0.$$

Wir brauchen demnach die Betrachtung nur für die vier Funktionen (3
durchzuführen. In diesen vier Fällen macht aber die Aufstellung der R
lationen (34) keine Mühe. Man erhält für $\varphi(x) = e^x$

$$m\psi_m - a_1\psi_{m-1} - 2a_2\psi_{m-2} - \ldots - ma_m\psi_0 = 0,$$

für $\varphi(x) = (1+x)^\mu$

$$m\psi_m + (m-\mu)a_1\psi_{m-1} + \ldots + (m-m\mu)a_m\psi_0 = 0,$$

für $\varphi(x) = \log(1+x)$

$$\psi_m + a_1\psi_{m-1} + \ldots + a_m\psi_0 = 0$$

und endlich für $\varphi(x) = (1+x)\log(1+x)$

$$m\psi_m + (m-1)a_1\psi_{m-1} + (m-2)a_2\psi_{m-2} + \ldots + a_{m-1}\psi_1 - ma_m\psi_0 =$$

Hieraus ergeben sich auch ohne weiteres in jedem der vier zu b
trachtenden Fälle die $n-1$ Differentialgleichungen (22), denen bei g
gebenem $n$ die zugehörige Form $F = F^{(n)}$ der Variablen $a_0, a_1, \ldots,$
genügt. Wir beherrschen demnach auch die Gruppe $\mathfrak{H}$ der linearen Tran
formationen, die $F$ ungeändert lassen, in jedem der vier Fälle.

Der Vollständigkeit wegen wollen wir auch die analytische Bedeutung sich so ergebenden Gruppen $\mathfrak{F}$ genauer zu kennzeichnen versuchen. zu beweisen wir folgenden

Hilfssatz. *Es sei*

$$P(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots$$

*beliebige Potenzreihe. Bei gegebenem $n > 1$ setze man, wenn $\nu$ eine Zahlen $1, 2, \dots, n-1$ und $\varrho$ eine beliebige Konstante bedeutet,*

$$Q(x) = (1 + \varrho x^\nu)^{\frac{n-\nu}{\nu}} P\left(\frac{x}{(1+\varrho x^\nu)^{\frac{1}{\nu}}}\right).$$

*wickelt man dann $Q(x)$ nach Potenzen von $x$, so wird der Koient $B_n$ von $x^n$ wieder gleich $A_n$.*

Um nämlich $B_n$ zu berechnen, hat man in

$$Q(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} A_\lambda x^\lambda (1 + \varrho x^\nu)^{\frac{n-\nu-\lambda}{\nu}}$$

$\lambda = 1, 2, \dots, n$ jeden Summanden nach Potenzen von $x$ zu entwickeln. bei liefert das $\lambda$-te Glied nur solche Potenzen $x^m$, für die $m \equiv \lambda \pmod{\nu}$ l. Ist demnach

$$n = q\nu + \mu \qquad (0 < \mu \leqq \nu),$$

aben wir nur die Teilsumme

$$Q_1(x) = \sum_{k=0}^{q} A_{k\nu+\mu} x^{k\nu+\mu} (1 + \varrho x^\nu)^{\frac{q\nu-\nu-k\nu}{\nu}}$$

berücksichtigen. Für $k < q$ ist aber hierin der $k$-te Summand ein nom des Grades $(q-1)\nu + \mu < n$. Die Potenz $x^n$ tritt demnach nur letzten Summanden, und zwar mit dem Koeffizienten $A_{q\nu+\mu} = A_n$ auf. Im folgenden setze man zur Abkürzung

$$x^* = \frac{x}{(1+\varrho x^\nu)^{\frac{1}{\nu}}}.$$

Ist nun zunächst

$$\varphi(g) = e^g = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(a_1, \dots, a_n) x^n,$$

leibt nach unserem Hilfssatz $\varphi_n$ für jedes $n$ ungeändert, wenn für $1, 2, \dots, n-1$ und beliebiges $\varrho$ an Stelle von $g(x)$ die Funktion

$$g^{(1)}(x) = g(x^*) + \frac{n-\nu}{\nu} \log(1 + \varrho x^\nu)$$

Dasselbe gilt für $\varphi(g)=(1+g)^{\mu}$, wenn $g(x)$ durch

$$g^{(2)}(x)=(1+\varrho x^{\nu})^{\frac{n-\nu}{\mu\nu}}[1+g(x^*)]-1$$

ersetzt wird.

Im Falle $\varphi(g)=\log(1+g)$ bleibt $\varphi_n$ schon ungeändert, wenn r für $g(x)$ die Funktion

$$g^{(3)}(x)=e^{\varrho x^{\nu}}[1+g(x)]-1 \qquad (\nu=1,2,\ldots,n-$$

treten läßt.

Ist endlich $\varphi(g)=(1+g)\log(1+g)$, so ändert sich, wie wieder unserem Hilfssatz ohne Mühe folgt, der Koeffizient $\varphi_n$ von $x^n$ nicht, f $g(x)$ durch die Funktion

$$g^{(4)}(x)=(1+\varrho x^{\nu})^{\frac{n-\nu}{\nu}}[1+g(x^*)]-\beta_{\nu}x^n-1$$

ersetzt wird. Hierbei soll $\beta_{\nu}$ den Koeffizienten von $x^n$ in der Entwi lung von

$$(1+\varrho x^{\nu})^{\frac{n-\nu}{\nu}}[1+g(x^*)]\log(1+\varrho x^{\nu})^{\frac{n-\nu}{\nu}}$$

bedeuten [9]).

In jedem der vier Fälle ist der Übergang von $g(x)$ zu $g^{(\alpha)}(x)$ glei bedeutend mit einer wohlbestimmten linearen Transformation

$$(T_{\nu}(\varrho)) \qquad a'_{\varkappa}=p_{\varkappa 0}+p_{\varkappa 1}a_1+\ldots+p_{\varkappa\varkappa}a_{\varkappa}$$

der Koeffizienten $a_1, a_2, \ldots$ Hierbei sind die $p_{\varkappa\lambda}$ ganze rationale Fun tionen des Parameters $\varrho$, und insbesondere wird

$$a'_1=a_1, \quad a'_2=a_2, \quad \ldots, \quad a'_{\nu-1}=a_{\nu-1}, \quad a'_{\nu}=\alpha_{\nu}\varrho+a_{\nu},$$

wo $\alpha_{\nu}$ eine gewisse von Null verschiedene Konstante bedeutet.

In Verbindung mit dem im vorigen Paragraphen Bewiesenen könn wir nun unser Ergebnis folgendermaßen aussprechen:

Bedeutet $\varphi(x)$ eine der Funktionen

$$e^x, \quad (1+x)^{\mu}, \quad \log(1+x), \quad (1+x)\log(1+x) \qquad (\mu\neq 0,1,2,\ldots$$

und setzt man

$$\varphi(a_1x+a_2x^2+\ldots)=\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(a_1,a_2,\ldots,a_n)x^n,$$

so läßt sich für $n>2$ jede lineare Transformation

$$a'_{\varkappa}=q_{\varkappa 0}+q_{\varkappa 1}a_1+\ldots+q_{\varkappa n}a_n \qquad (\varkappa=1,2,\ldots,n$$

[9]) Eine einfache Rechnung liefert

$$\beta_{\nu}=\frac{n-\nu}{\nu}\left[a_{n-\nu}\varrho+a_{n-2\nu}\frac{\varrho^2}{2}+a_{n-3\nu}\frac{\varrho^3}{3}+\ldots\right].$$

Variablen $a_1, a_2, \ldots, a_n$, welche die Funktion $\varphi_n$ bis auf einen kon-
ten Faktor ungeändert läßt, bei passender Wahl der Parameter
$_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$ aus der Transformation $a'_\varkappa = \varrho^\varkappa a_\varkappa$ und den vorhin
akterisierten Transformationen

$$T_1(\xi_1), \quad T_2(\xi_2), \quad \ldots, \quad T_{n-1}(\xi_{n-1})$$

mmensetzen. Diese Funktionen $\varphi(x)$ sind zugleich im wesentlichen
einzigen, für die sich die Diskussion in derselben Weise durch-
en läßt.

Die beiden Fälle

$$\varphi(x) = \log(1+x), \qquad \varphi(x) = (1+x)^{-1}$$

insbesondere für die Theorie der symmetrischen Funktionen von
tigkeit. Deutet man nämlich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ als die elementaren
metrischen Funktionen von $n$ Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, so wird
rsten Fall

$$\varphi_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{(-1)^{n-1}}{n}(x_1^n + x_2^n + \ldots + x_n^n),$$

im zweiten Fall

$$\varphi_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (-1)^n w_n(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$w_n$ die sog. Wronskische Alephfunktion $n$-ten Grades bedeutet,
die Summe aller Produkte von der Dimension $n$, die sich mit Hilfe
$x_1, x_2, \ldots, x_n$ bilden lassen.

(Eingegangen am 30. Juli 1921.)

# Über einen Hauptsatz in der Theorie der konvexen Polyeder

Von

Konrad Zindler in Innsbruck.

## § 1.

## Einleitung.

H. Brunn hat zuerst über drei parallele Schnitte eines konvexen Körpers mit den Inhalten $F'$, $F^*$ und $F$ einen Satz aufgestellt[1]), den man jetzt etwa so in eine Formel zu fassen pflegt[2]):

Hauptsatz. *Wenn der Schnitt $F$ zwischen den beiden andern mit dem Abstandsverhältnis $t:(1-t)$ liegt, so ist:*

$$\sqrt{F} \geqq (1-t)\sqrt{F'} + t\sqrt{F^*}, \tag{1}$$

*wobei das Gleichheitszeichen nur dann gilt, wenn $F'$ und $F^*$ ähnlich sind und ähnlich liegen und wenn überdies der zwischen $F'$ und $F$ liegende Teil des konvexen Körpers aus dem verbindenden Kegelstumpf besteht.*

Später wurden Beweise nach anderen Methoden mehrfach gegeben[3]). Man hat aber noch nicht den elementaren Fall beliebiger konvexer Polyeder ausdrücklich als solchen herausgearbeitet. Man darf nämlich verlangen

---

[1]) Über Kurven ohne Wendepunkte (München 1889, S. 50). Der Sonderfall $F' = F^*$ auch schon in „Über Ovale und Eiflächen" (Diss. München 1887, S. 23).

[2]) S. z. B. W. Blaschke, Kreis und Kugel, Leipzig 1916, S. 91.

[3]) H. Minkowski, Mathematische Annalen 57 (1903), S. 447–495 = Ges. Abh. Geometrie der Zahlen, Leipzig 1910, § 56, 57; W. Blaschke, Jahresb. d. D. M. V. (1914), S. 210–234; G. Frobenius, Sitzungsberichte der Akademie Berlin 191 S. 387 404; auch Brunn hat Ergänzungen zu seinem Beweis gegeben: Berichte d Akademie München 24 (1894). Weitere Literatur über ein damit zusammenhängend isoperimetrisches Problem bei Blaschke a. a. O.[2]).

ieser Sonderfall *ohne Grenzbetrachtungen* erledigt wird[4]). Dies ge-leicht, wenn man von Trapezkörpern statt, wie Brunn, von „Obe-" ausgeht (die durch zwei Rechtecke in parallelen Ebenen definiert n).

## § 2.

## Die Trapezkörper.

Es seien $T' = A'B'C'D'$ und $T^* = A^*B^*C^*D^*$ zwei Trapeze in zwei elen Ebenen $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{E}^*$, und zwar sei $A'B' \| A^*B^* \| D'C' \| D^*C^*$, h die Bezeichnung so gewählt, daß $C'D'$ und $C^*D^*$ auf derselben der Ebene $A'B'B^*A^*$ liegen. Dann werden auf jeder Ebene $\mathfrak{E}$ arallelbüschels $\mathfrak{E}'\mathfrak{E}^*$, die zwischen diesen beiden liegt, durch die Strecken $A'A^*, \ldots, D'D^*$ die vier Ecken eines Trapezes $T$ heraus-nitten. Die Gesamtheit dieser $T$ bildet einen „*Trapezkörper*" $\mathfrak{T}$. Daneben betrachten wir ein Prismatoid $\mathfrak{P}$, nämlich den kleinsten xen Körper, der $T'$ und $T^*$ enthält. $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{P}$ sind nur identisch, die Vierecke $B'C'C^*B^*$ und $A'D'D^*A^*$ (die „*Seitenvierecke*") eben sind, m a. W. wenn $T'$ und $T^*$ gleichgerichtet sind, d. h. vier paralleler Seiten haben[5]). Es seien $m', m^*, m$ die Mittellinien der ze $T', T^*, T$, ferner $h', h^*, h$ ihre Höhen und $f', f^*, f$ ihre en[6]). Endlich sei $\mu : \lambda$ das Abstandsverhältnis $(\mathfrak{E}'\mathfrak{E}) : (\mathfrak{E}\mathfrak{E}^*)$ und

$$\lambda + \mu = 1.$$

ist:

$$f' = m'h', \qquad f^* = m^*h^*;$$

$$m = \lambda m' + \mu m^*, \qquad h = \lambda h' + \mu h^*.$$

Wir setzen

$$f^* = v^2 f'$$

önnen annehmen[6]):

$$0 \leqq v \leqq 1.$$

---

Auch E. Salkowski besitzt (nach brieflicher Mitteilung) einen elementaren , der aber auf ganz anderem Gedankengang beruht.

Andernfalls ist $\mathfrak{T}$ von vier Trapezen und zwei Stücken hyperbolischer Para- begrenzt; $\mathfrak{P}$ übertrifft $\mathfrak{T}$ um zwei halbe Tetraeder, die durch die Seitenvierecke nt sind; s. Heinze-Lucke, Genet. Stereometrie (Leipzig 1886), S. 8.

Wir wollen annehmen: $f' > 0$, $m^* > 0$, dagegen soll $h^* = 0$ zulässig sein; ntsteht ein „*Dachkörper*". Ebenso gilt das folgende, wenn $T'$ oder $T^*$ oder n Dreiecke ausarten, oder $T'$ in ein Dreieck, $T^*$ in eine Strecke.

Also:

$$(7) \qquad f = mh = f'(\lambda + \mu v)^2 + \lambda\mu(m'h^* + m^*h' - 2vf').$$

Es sei

$$(8) \qquad h^* = \alpha h', \qquad m^* = \beta m',$$

so daß

$$\alpha\beta = v^2.$$

Dann ist:

$$(9) \qquad f = f'(\lambda + \mu v)^2 + \lambda\mu f'(\alpha + \beta - 2v).$$

Nun ist

$$(10) \qquad \alpha + \beta - 2v \geqq 0,$$

wobei das Gleichheitszeichen nur gilt, wenn $\alpha = \beta = v$ ist, weil unte allen Rechtecken gleichen Inhalts das Quadrat den kleinsten Umfang ha Also:

$$(11) \qquad \sqrt{f} \geqq \lambda\sqrt{f'} + \mu\sqrt{f^*}.$$

Satz 1. *Für die Querschnitte $f$ eines Trapezkörpers gilt die Be ziehung* (11), *wobei das Gleichheitszeichen nur gilt, wenn*

$$(12) \qquad h^* : h' = m^* : m'$$

*ist.*

Für $f' = f^*$ folgt:

Satz 2. *Für einen Trapezkörper mit gleichen Basen ist $f \geqq f'$ wobei das Gleichheitszeichen nur gilt, wenn $m^* = m'$ und $h^* = h'$ ist.*

## § 3.

## Die konvexen Polyeder.

Wenn in den Ebenen $\mathfrak{E}', \mathfrak{E}^*$ zwei konvexe Polygone $P', P^*$, di zunächst nicht auf Strecken zusammenschrumpfen sollen, mit den Inhalten $F', F^*$ gegeben sind, so ist der kleinste konvexe Körper, der sie enthält ein Prismatoid $\mathfrak{P}$. Es sei wieder

$$(13) \qquad F^* = v^2 F'; \qquad 0 < v \leqq 1.$$

Wir wählen in der Stellung $\mathfrak{E}'$ eine Richtung $\varrho$, die weder mit eine Seitenrichtung von $P'$ noch von $P^*$ zusammenfallen soll, und ziehen durch alle Ecken, sowohl von $P'$ als von $P^*$ die Parallelen zu $\varrho$. Wenn also $n'$ und $n^*$ die Anzahlen der Ecken sind, so werden $P'$ und $P^*$ dadurch in höchstens $n' - 1$ bzw. $n^* - 1$ Stücke geteilt. Es sei $s_0'$ eine zu parallele Stützgerade von $P'$, ebenso $s_0^*$ die auf derselben Seite liegend

arallele Stützgerade von $P^*$; die teilenden Strecken in $P'$ und $P^*$ seien it $s_i'$ und $s_k^*$ bezeichnet. Der zwischen $s_0'$ und $s'$ liegende Teil von $P'$ abe die Fläche $\omega_i' F'$; analog sei $\omega_k^* F^*$ der zwischen $s_0^*$ und $s_k^*$ liegende eil von $P^*$. Wir überlagern nun die Einteilungen beider Polygone, dem wir auch in $P^*$ diejenigen Sehnen der Richtung $\varrho$ ziehen, die (von $^*$ aus gerechnet) die Bruchteile $\omega_i'$ von $F^*$ abschneiden, und umgekehrt $P'$ die Sehnen, welche die Bruchteile $\omega_k^*$ von $F'$ abschneiden. Dann erden $P'$ und $P^*$ in gleich viele Streifen zerlegt, die wir, sowie die eilenden Sehnen $\sigma_\nu'$ und $\sigma_\nu^*$, fortlaufend numerieren. Die Teile von $P'$ nd $P^*$ und ihre Inhalte bezeichnen wir mit $f_\nu'$ und $f_\nu^*$, so daß $f_\nu'$ zwischen $_{-1}$ und $\sigma_\nu'$ liegt, ebenso $f_\nu^*$ zwischen $\sigma_{\nu-1}^*$ und $\sigma_\nu^*$, wobei $\sigma_0'$ mit $s_0'$ iden- sch ist, $\sigma_0^*$ mit $s_0^*$. Dann ist

$$f_\nu^* = v^2 f_\nu' \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n;\ n \leqq n' + n^* - 3). \tag{14}$$

Wir verbinden $f_\nu'$ und $f_\nu^*$ durch einen Trapezkörper $\mathfrak{T}_\nu$, zu dem ein rismatoid $\mathfrak{P}_\nu$ gehört. Wenn nun die Zwischenebene $\mathfrak{E}$ von $\mathfrak{T}_\nu$ in $T_\nu$ mit er Fläche $f_\nu$ geschnitten wird, von $\mathfrak{P}_\nu$ in $Q_\nu$ mit der Fläche $q_\nu$, von $\mathfrak{P}$ n einer Fläche $\Phi$, endlich von einem konvexen Körper, dem $P'$ und $P^*$ ls Parallelschnitte angehören, in einer Fläche $F$, so setzen wir:

$$\sum_1^n f_\nu = T, \qquad \sum_1^n q_\nu = Q. \tag{15}$$

Auf jeden $\mathfrak{T}_\nu$ können wir die Gleichungen des § 2 anwenden, wobei ir die Symbole $m', h'$ usw. jetzt durch den Index $\nu$ für die einzelnen $_\nu$ vervielfältigen. Durch Addition der $n$ Beziehungen (vgl. 9)

$$f_\nu \geqq f_\nu' (\lambda + \mu v)^2 \tag{16}$$

nd nachherige Wurzelziehung finden wir

$$\sqrt{T} \geqq \lambda \sqrt{F'} + \mu \sqrt{F^*}. \tag{17}$$

erner ist:

$$F \geqq \Phi, \qquad \Phi \geqq Q, \qquad Q \geqq T. \tag{18}$$

Nun gilt nach Satz 1 in (17) nur dann das Gleichheitszeichen, wenn ir *alle* $\nu$

$$h_\nu^* = v h_\nu', \qquad m_\nu^* = v m_\nu' \tag{19}$$

t. In diesem Fall folgt, da $f_1'$ und $f_1^*$ Dreiecke sind, zunächst $\sigma_1^* = v\sigma_1'$, ann hieraus und aus $m_2^* = v m_2'$ auch $\sigma_2^* = v\sigma_2'$ usw., so daß man die edingungen (19) durch

$$h_\nu^* = v h_\nu', \qquad \sigma_\nu^* = v \sigma_\nu' \tag{20}$$

rsetzen kann. Aber auch wenn sie erfüllt sind, gilt in der dritten Be-

ziehung (18) noch immer das Ungleichheitszeichen, außer wenn die Seite vierecke aller $\mathfrak{T}_\nu$ eben sind. Diese Eigenschaft bringt aber in Verbindu mit (20) schon mit sich, daß alle Paare $f'_\nu$, $f^*_\nu$ und daher auch $P'$, $P$ ähnlich sind und ähnlich liegen, so daß dann auch in der zweiten B ziehung (18) das Gleichheitszeichen gilt.

Um nun auch den Fall zu erledigen, daß eins der Polygone, etwa $P'$ sich auf eine eigentliche Strecke $s$ zusammenzieht (weitergehende Sonde fälle sind von vornherein durchsichtig), braucht man $\mathfrak{P}$ nur durch geeigne Ebenen des Büschels $s$ in lauter Dachkörper zu zerlegen. Also ist jet der Hauptsatz für beliebige konvexe Polyeder ausnahmslos bewiesen, n daß der dortige Kegelstumpf hier zu einem Pyramidenstumpf wird.

## § 4.

## Bemerkung über Streifengleichheit.

Wenn zwei Bereiche $B$, $B'$ in parallelen Ebenen durch Symmetri sierung bezüglich einer Richtung $a$ in kongruente und gleich orientierte B reiche übergehen, so sagen wir, $B$, $B'$ seien bezüglich der zu $a$ senkrechte Richtung $\varrho$ oder „in der Richtung $\varrho$“ *streifengleich*[7]). Ersetzt man de einen Bereich durch einen ähnlichen und ähnlich liegenden, so erhält ma zwei „ähnlich gestreckte“ Bereiche[8]). Die Bedeutung der Gleichunge (20) ist, daß $P'$ und $P^*$ bezüglich $\varrho$ ähnlich gestreckt sind. Es gilt nun

Satz 3. *Es gibt Paare von konvexen Bereichen, die, ohne kongruen zu sein, in n Richtungen streifengleich sind, wobei n eine beliebige An zahl sein kann.*

Man denke sich nämlich einem Kreise $K$ ein regelmäßiges $2n$-Ec eingeschrieben und die Segmente, die dadurch entstehen, der Reihe nac numeriert. Schneidet man von $K$ das eine Mal die Segmente mit gerade Nummern ab, das andre Mal die mit ungeraden Nummern, so erhält ma zwei Bereiche $B$, $B'$, die bezüglich der $n$ Richtungen geeigneter Diagonale des $2n$-Ecks streifengleich sind[9]). Um die Kongruenz von $B$, $B'$ z beseitigen, unterwerfe man ihre Ebene einer geeigneten affinen Trans formation, wodurch die Streifengleichheit nicht gestört wird.

[7]) Dieser Begriff geht auf Brunn (a. a. O. [3]) zurück, der (in etwas andere Form) den Satz aufstellt, daß zwei Bereiche, die bezüglich jeder Richtung ihre Ebene streifengleich sind, kongruent und gleich orientiert sind; ein anderer Beweis bei Minkowski (a. a. O. [3]).

[8]) H. Minkowski, Geometrie der Zahlen § 56. Er erhält umgekehrt di streifengleichen Bereiche, die er „gleich gestreckt“ nennt, als Sonderfall der ähnlich gestreckten, deren Definition er in analytischer Form gibt.

[9]) Will man $B$, $B'$ als konvexe Polygone erhalten, so kann man, statt von einem Kreis auszugehen, von einem regelmäßigen $2n$-Eck jede zweite Ecke durch Verbin dung der Mittelpunkte der Nachbarseiten abschneiden usw.

(Eingegangen am 1. August 1921.)

# Über die Abelsche Integralgleichung mit konstanten Integrationsgrenzen.

Von

Torsten Carleman in Upsala.

---

Im folgenden wollen wir eine Auflösungsformel für die Integral-
leichung

$$\int_0^1 \frac{1}{|x-y|^\alpha}\varphi(y)\,dy = f(x) \qquad (0<\alpha<1) \tag{1}$$

erleiten. Diese Gleichung unterscheidet sich von der bekannten Abelschen
ntegralgleichung

$$\int_0^x \frac{\varphi(y)}{(x-y)^\alpha}\,dy = f(x)$$

ur dadurch, daß in jener die Integrationsgrenzen fest sind.

Es möge zunächst die Lösbarkeit der homogenen Integralgleichung

$$\int_0^1 \frac{1}{|x-y|^\alpha}\varphi(y)\,dy = 0 \tag{2}$$

ntersucht werden. Zu dem Zwecke betrachten wir die analytische Funktion

$$F(x) = \int_0^1 \frac{1}{(x-y)^\alpha}\varphi(y)\,dy \qquad (x>1), \tag{3}$$

o $\varphi(y)$ als eine absolut integrierbare Lösung von (2) angenommen wird,
beschaffen, daß

$$\frac{1}{|x-y|^\alpha}\varphi(y)$$

ir $0<x<1$ im Lebesgueschen Sinne integrierbar ist.

Wir schreiben für $x$ reell und $<1$:

$$\left.\begin{aligned} F(x+i0) &= \lim_{\varepsilon=0} F(x+i\varepsilon),\\ F(x-i0) &= \lim_{\varepsilon=0} F(x-i\varepsilon), \end{aligned}\right\} \qquad (\varepsilon>0),$$

falls diese Grenzwerte existieren. Es gelten die Gleichungen:

$$F(x+i0)=\int_0^x \frac{\varphi(y)}{(x-y)^\alpha}dy+e^{-\alpha\pi i}\int_x^1 \frac{\varphi(y)}{(y-x)^\alpha}dy, \tag{4}$$

$$(0<x<1)$$

$$F(x-i0)=\int_0^x \frac{\varphi(y)}{(x-y)^\alpha}dy+e^{\alpha\pi i}\int_x^1 \frac{\varphi(y)}{(y-x)^\alpha}dy, \tag{5}$$

Dies folgt leicht daraus, daß man infolge der Voraussetzungen eine solche Größe $d$ finden kann, daß (bei festem reellen $x$)

$$\left|\int_{x-d}^{x+d}\frac{\varphi(y)}{(x\pm i\varepsilon-y)^\alpha}dy\right|\leqq\int_{x-d}^{x+d}\frac{|\varphi(y)|}{|x-y|^\alpha}dy<\delta,$$

wo $\delta$ eine beliebige vorgegebene positive Größe ist. Berücksichtigen wir noch die Gleichung

$$\int_0^x \frac{\varphi(y)}{(x-y)^\alpha}dy+\int_x^1 \frac{\varphi(y)}{(y-x)^\alpha}dy=0, \tag{6}$$

so ergibt sich aus (4) und (5):

$$F(x+i0)=-e^{-\alpha\pi i}F(x-i0) \qquad (0<x<1). \tag{7}$$

Ferner gilt:

$$F(x+i0)=e^{-2\alpha\pi i}F(x-i0) \qquad (x<0). \tag{8}$$

Wüßten wir nur, daß die Grenzwerte

$$F(x+i0),\quad F(x-i0) \qquad (0<x<1)$$

gleichmäßig (in bezug auf $x$) existieren, so würde $F(x)$ über die Strecke $0<x<1$ hinaus analytisch fortsetzbar sein, infolge des folgenden bekannten Satzes: Wenn die Definitionsgebiete zweier analytischen Funktionen $F_1(z)$ und $F_2(z)$ eine gemeinsame rektifizierbare Begrenzungslinie $L$ haben und dort stetig miteinander zusammenhängen, so läßt sich $F_1(z)$ durch $F_2(z)$ über $L$ hinaus analytisch fortsetzen und umgekehrt.

Um die Schwierigkeit bezüglich der gleichmäßigen Konvergenz zu vermeiden, betrachten wir statt $F(x)$ die Funktion

$$\psi(x)=\int F(x)dx=\frac{1}{1-\alpha}\int_0^1 (x-y)^{1-\alpha}\varphi(y)dy. \tag{9}$$

Da $|x-y|^{1-\alpha}$ endlich bleibt, und weil ferner $\int^x|\varphi(x)|dx$ absolut stetig ist, so konvergieren $\psi(x+i\varepsilon)$ und $\psi(x-i\varepsilon)$ für $\varepsilon\to 0$ im Intervalle $0<x<1$ gleichmäßig gegen stetige Grenzwerte, die durch die Formeln

$$\psi(x+i0)=\frac{1}{1-\alpha}\left[\int_0^x (x-y)^{1-\alpha}\varphi(y)\,dy+e^{\pi i(1-\alpha)}\int_x^1 (y-x)^{1-\alpha}\varphi(y)\,dy\right],$$

$$\psi(x-i0)=\frac{1}{1-\alpha}\left[\int_0^x (x-y)^{1-\alpha}\varphi(y)\,dy+e^{-\pi i(1-\alpha)}\int_x^1 (y-x)^{1-\alpha}\varphi(y)\,dy\right]$$

dargestellt werden können. Falls wir in der Gleichung (2) $x$ durch $s$ ersetzen und dann in bezug auf $s$ von Null bis $x$ integrieren, so ergibt sich

$$11)\quad \int_0^x (x-y)^{1-\alpha}\varphi(y)\,dy-\int_x^1 (y-x)^{1-\alpha}\varphi(y)\,dy=k \quad (k=\text{Konstante}).$$

Aus (10) ergibt sich nun

$$\psi(x+i0)=-e^{-\alpha\pi i}\psi(x-i0)+k',$$

wo $k'$ eine Konstante bedeutet. Hieraus folgt, wie oben, daß $\psi(x)$ über die Strecke (01) hinaus analytisch fortgesetzt werden kann. Infolge (9) gilt dann dasselbe von $F(x)$. Daß $F(x)$ auf der negativen reellen Achse regulär bleibt, geht aus (3) unmittelbar hervor. Aus (7) und (8) folgt nun, daß

$$12)\quad \Phi(x)=F(x)[x(x-1)]^{\frac{1+\alpha}{2}}$$

eine in der ganzen Ebene eindeutige Funktion ist, für welche nur 0, 1 und $\infty$ singuläre Punkte sein können. In der Umgebung von $x=\infty$ besitzt $F(x)$, wie dies aus (3) leicht folgt, eine Entwicklung von der Form

$$\frac{1}{x^\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{x^n}.$$

Folglich kann $\Phi(x)$ höchstens wie $|x|$ unendlich werden. In der Umgebung von $x=1$ gilt ferner, da $\Phi(x)$ eindeutig ist, eine Darstellung von der Form

$$F(x)=(x-1)^{-\frac{1+\alpha}{2}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(x-1)^n,$$

und somit für $\int^x F(x)\,dx$:

$$\int^x F(x)\,dx=C+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{a_n(x-1)^{n+\frac{1-\alpha}{2}}}{n+\frac{1-\alpha}{2}}=C+(x-1)^{-\frac{1+\alpha}{2}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\frac{(x-1)^{n+1}}{n+\frac{1-\alpha}{2}}.$$

Folglich:

$$13)\quad \sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\frac{(x-1)^{n+1}}{n+\frac{1-\alpha}{2}}=\left[\int^x F(x)\,dx-C\right](x-1)^{\frac{1+\alpha}{2}}.$$

Da $\int^{x} F(x)\,dx$ für $-\pi \leqq \arg(x-1) \leqq \pi$ endlich bleibt, so können nach einem Satze von Weierstraß, in der Reihe auf der rechten Seite von (13) keine negativen Potenzen auftreten. Ferner muß die Reihe für $x=1$ verschwinden. Somit gilt

$$a_n = 0 \qquad (n<0).$$

Folglich ist $\Phi(x)$ für $x=1$ regulär. Aus der für $x>1$ gültigen Ungleichung

$$|F(x)| \leqq \frac{1}{|x-1|^{\alpha}} \int_0^1 |\varphi(y)|\,dy$$

ergibt sich, daß $\Phi(x)$ im Punkte $x=1$ verschwindet. Eine analoge Überlegung zeigt, daß $\Phi(x)$ auch im Punkte $x=0$ regulär bleibt und dort mindestens eine einfache Nullstelle besitzt Weil also $\Phi(x)$ eine ganze Funktion ist, die in 0 und 1 verschwindet, und welche im Unendlichen höchstens wie $|x|$ wächst, so muß $\Phi(x)$ und damit auch $F(x)$ identisch verschwinden. Aus (4) und (5) schließt man:

$$\int_x^1 \frac{\varphi(y)}{(y-x)^{\alpha}}\,dy = \frac{1}{e^{\alpha\pi i} - e^{-\alpha\pi i}} [F(x-i0) - F(x+i0)].$$

Es gilt somit:

$$\int_x^1 \frac{\varphi(y)}{(y-x)^{\alpha}}\,dy = 0,$$

woraus, nach der Theorie der Abelschen Integralgleichung

$$\int_x^1 \varphi(y)\,dy = 0$$

folgt. Es hat sich somit ergeben:

*Jede summierbare*[1]) *Lösung der Gleichung*

$$\int_0^1 \frac{1}{|x-y|^{\alpha}} \varphi(y)\,dy = 0 \qquad (0<\alpha<1)$$

(von solcher Art, daß auch $\frac{1}{|x-y|^{\alpha}}\varphi(y)$ eine summierbare Funktion von $y$ ist für $0<x<1$) *ist notwendig bis auf eine Nullmenge identisch gleich Null.*

---

[1]) Integrierbar im Sinne von Lebesgue.

Um die Lösung der allgemeinen Gleichung (1) zu finden, betrachten wir wiederum die Funktion

$$F(x)=\int_0^1 \frac{1}{(x-y)^\alpha}\varphi(y)\,dy,$$

wo $\varphi(y)$ als eine Lösung von (1) angenommen ist. Man erhält wie oben die Relationen:

14) $F(x+i0)=e^{-2\alpha\pi i}F(x-i0) \qquad (-\infty<x<0),$

15) $F(x+i0)=-e^{-\alpha\pi i}F(x-i0)+(1+e^{-\alpha\pi i})f(x) \quad (0<x<1).$

Betrachten wir nun statt $F(x)$ die Funktion

$$\Phi(x)=F(x)[x(x-1)]^{\frac{\alpha-1}{2}},$$

so ergibt sich

16) $\Phi(x+i0)=\Phi(x-i0) \qquad (-\infty<x<0),$

17) $\Phi(x+i0)-\Phi(x-i0)=-2i\cos\frac{\alpha\pi}{2}f(x)[x(1-x)]^{\frac{\alpha-1}{2}} \qquad (0<x<1).$

Durch diese Gleichungen wird man zu dem Ansatz

18) $\Phi(x)=-\frac{1}{\pi}\cos\frac{\alpha\pi}{2}\int_0^1 \frac{1}{s-x}f(s)[s(1-s)]^{\frac{\alpha-1}{2}}\,ds$

geführt. Aus den Relationen

19) $F(x+i0)=\int_0^x \frac{\varphi(y)}{(x-y)^\alpha}\,dy+e^{-\alpha\pi i}\int_x^1 \frac{1}{(y-x)^\alpha}\varphi(y)\,dy,$

20) $F(x-i0)=\int_0^x \frac{\varphi(y)}{(x-y)^\alpha}\,dy+e^{\alpha\pi i}\int_x^1 \frac{1}{(y-x)^\alpha}\varphi(y)\,dy \qquad (0<x<1)$

erhält man

21) $\int_x^1 \frac{1}{(y-x)^\alpha}\varphi(y)\,dy=\frac{1}{2i\sin\alpha\pi}[F(x-i0)-F(x+i0)],$

22) $\int_0^x \frac{1}{(x-y)^\alpha}\varphi(y)\,dy=\frac{1}{2i\sin\alpha\pi}[e^{\alpha\pi i}F(x+i0)-e^{-\alpha\pi i}F(x-i0)].$

Durch Einführung der Funktion $\Phi(x)$ ergeben sich aus

$$F(x+i0)=i[x(1-x)]^{\frac{1-\alpha}{2}}e^{-\frac{\pi i\alpha}{2}}\Phi(x+i0),$$

$$F(x-i0)=-i[x(1-x)]^{\frac{1-\alpha}{2}}e^{\frac{\pi i\alpha}{2}}\Phi(x-i0)$$

die folgenden Gleichungen

$$(23)\quad \int_x^1 \frac{1}{(y-x)^\alpha}\varphi(y)dy = -\frac{1}{2\sin\alpha\pi}\left[e^{\frac{\pi i\alpha}{2}}\Phi(x-i0)+e^{-\frac{\pi i\alpha}{2}}\Phi(x+i0)\right][x(1-$$

$$(24)\quad \int_0^x \frac{1}{(x-y)^\alpha}\varphi(y)dy = \frac{1}{2\sin\alpha\pi}\left[e^{\frac{\pi i\alpha}{2}}\Phi(x+i0)+e^{-\frac{\pi i\alpha}{2}}\Phi(x-i0)\right][x(1-x)]$$

Wenden wir nun auf (24) die Abelsche Auflösungsformel an, so finden wi

$$(25)\qquad \varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}}$$

$$\left[e^{\frac{\pi i\alpha}{2}}\Phi(t+i0)+e^{-\frac{\pi i\alpha}{2}}\Phi(t-i0)\right][t(1-t)]^{\frac{1-\alpha}{2}}dt.$$

Es sei in der komplexen $x$-Ebene $I'_x$ eine Kurve, die vom Punkte $x$ $(0<x<1)$ ausgehend, den Punkt $x=0$ einmal im positiven Sinne um kreist und dann zu $x$ zurückkehrt, ohne die positive reelle Achse zu schneiden. Man stellt leicht fest, daß (25) folgendermaßen geschrieben werden kann[2]):

$$(26)\qquad \varphi(x) = \frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dx}\int_{I'_x} \frac{1}{(t-x)^{1-\alpha}}[t(t-1)]^{\frac{1-\alpha}{2}}\Phi(t)dt.$$

Bei Berücksichtigung von (18) ergibt sich schließlich

$$(27)\quad \varphi(x) = \frac{i\cos\frac{\alpha\pi}{2}}{2\pi^2}\frac{d}{dx}\int_{I'_x}\frac{[t(t-1)]^{\frac{1-\alpha}{2}}dt}{(t-x)^{1-\alpha}}\int_0^1 \frac{1}{s-t}[s(1-s)]^{\frac{\alpha-1}{2}}f(s)ds.$$

Wir müssen noch verifizieren, daß (27) wirklich eine Lösung von (1) darstellt. Hierbei machen wir die Annahme, daß $f(s)$ auf der Strecke $0\leqq s\leqq 1$ analytisch ist, obwohl weit geringere Voraussetzungen genügen würden. Es sei $D$ ein die Strecke (01) einschließen des Gebiet, wo $f(s)$ regulär bleibt. Es sei ferner $\gamma$ die in der beistehenden Figur gezeichnete, sich selbst durchschneidende Kurve. Man sieht leicht daß

$$\int_0^1 [s(1-s)]^{\frac{\alpha-1}{2}}\frac{1}{s-t}f(s)ds = \frac{i}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}}\int_\gamma [s(s-1)]^{\frac{\alpha-1}{2}}\frac{1}{s-t}f(s)ds$$

[2]) Man denke sich die $t$-Ebene längs der positiven reellen Achse aufgeschnitten und wähle für $[t(t-1)]^{\frac{1-\alpha}{2}}$ und $\frac{1}{(t-x)^{1-\alpha}}$ diejenigen Zweige, die für $t>1$ auf der Oberseite der reellen Achse reell sind.

ür $t$ außerhalb $\gamma$. Nehmen wir an, daß $t$ innerhalb $\gamma$ liegt, so ergibt sich

$$28) \quad \int_0^1 [s(1-s)]^{\frac{\alpha-1}{2}} \frac{1}{s-t} f(s)\,ds = \frac{i}{2\cos\alpha\frac{\pi}{2}} \int_\gamma [s(s-1)]^{\frac{\alpha-1}{2}} \frac{1}{s-t} f(s)\,ds \pm \frac{\pi}{\cos\frac{\alpha\pi}{2}} f(t)[t(t-1)]^{\frac{\alpha-1}{2}}.$$

Das erste Glied rechter Hand ist eine reguläre Funktion in der Umgebung von $t=0$ und $t=1$. $\Phi(t)$ ist im vorliegenden Falle analytisch fortsetzbar über die Strecke (01) hinaus. Aus dem Verhalten von $\Phi(t)$ um $t=0$ und $t=1$, wie es durch (28) gegeben ist, ersieht man, daß (23) und (24) wirklich (nach der Abelschen Formel) Lösungen besitzen.

Es sei nun $L$ eine geschlossene, die Strecke (01) umkreisende Linie. Das Integral

$$29) \quad \int_L \frac{1}{(t-x)^{1-\alpha}} [t(t-1)]^{\frac{1-\alpha}{2}} \Phi(t)\,dt = J$$

ändert seinen Wert nicht, wenn man die Linie $L$ ohne Überschreitung von (01) deformiert. Wenn man $L$ in einen unendlich großen Kreis übergehen läßt, so findet man, daß $J$ gleich einer von $x$ unabhängigen Konstante $K$ ist. Läßt man dagegen $L$ in die Doppellinie (01) übergehen[3]), so ergibt sich:

$$\int_0^x \frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}} [t(1-t)]^{\frac{1-\alpha}{2}} [\Phi(t-i0)e^{-\frac{\pi i\alpha}{2}} + \Phi(t+i0)e^{\frac{\pi i\alpha}{2}}]\,dt$$

$$-\int_x^1 \frac{1}{(t-x)^{1-\alpha}} [t(1-t)]^{\frac{1-\alpha}{2}} [\Phi(t-i0)e^{\frac{\pi i\alpha}{2}} + \Phi(t+i0)e^{-\frac{\pi i\alpha}{2}}]\,dt = K'$$

$(K' = \text{Konstante})$.

Durch Differentiation erhält man

$$\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}} [t(1-t)]^{\frac{1-\alpha}{2}} [\Phi(t-i0)e^{-\frac{\pi i\alpha}{2}} + \Phi(t+i0)e^{\frac{\pi i\alpha}{2}}]\,dt$$

$$= \frac{d}{dx}\int_x^1 \frac{1}{(t-x)^{1-\alpha}} [t(1-t)]^{\frac{1-\alpha}{2}} [\Phi(t-i0)e^{\frac{\pi i\alpha}{2}} + \Phi(t+i0)e^{-\frac{\pi i\alpha}{2}}]\,dt,$$

was nichts anderes besagt (gemäß der Abelschen Formel), als daß die Integralgleichungen (23) und (24) dieselbe Lösung $\varphi(x)$ haben, wo $\varphi(x)$

[3]) Daß $\Phi(t)$ den für diesen Grenzübergang nötigen Bedingungen genügt, ergibt sich aus (28).

die durch (26) oder (27) gegebene Funktion ist. Durch Addition von (23) und (24) ergibt sich

$$\int_0^1 \frac{1}{|x-y|}\varphi(y)\,dy = \frac{i}{2\cos\frac{\alpha\pi}{2}}[\Phi(x+i0)-\Phi(x-i0)]\,[x(1-x)]^{\frac{1-\alpha}{2}},$$

was mit Hilfe der Gleichung (17) in die zu beweisende Gleichung

$$\int_0^1 \frac{1}{|x-y|^\alpha}\varphi(y)\,dy = f(x)$$

übergeht. Das erhaltene Resultat fassen wir folgendermaßen zusammen:

*Die Gleichung*

$$\int_0^1 \frac{1}{|x-y|^\alpha}\varphi(y)\,dy = f(x) \qquad (0<\alpha<1)$$

*läßt sich durch die Formel*

$$\varphi(x) = \frac{i\cos\frac{\alpha\pi}{2}}{2\pi^2}\frac{d}{dx}\int_{\Gamma_x}\frac{[t(t-1)]^{\frac{1-\alpha}{2}}}{(t-x)^{1-\alpha}}\,dt\int_0^1\frac{1}{s-t}[s(1-s)]^{\frac{\alpha-1}{2}}f(s)\,ds$$

*eindeutig auflösen. $\Gamma_x$ ist hierbei eine beliebige geschlossene Kurve* (mit positivem Durchlaufungssinn), *die die positive reelle Achse nur im Punkte x schneidet.*

Man kann auch in analoger Weise Integralgleichungen von der Form

$$\int_0^1 \frac{G(x-y)}{|x-y|^\alpha}\varphi(y)\,dy = f(x)$$

behandeln, wo $G$ ein Polynom ist[4]).

Mit Hilfe der obigen Auflösungsformel für die Gleichung (1) kann man sehr allgemeine Integralgleichungen von der Form

$$\int_0^1 \left[\frac{A(y)}{|x-y|^\alpha}+H(x,y)\right]\varphi(y)\,dy = f(x)$$

auf Fredholmsche Integralgleichungen zweiter Art zurückführen.

Wir wollen noch durch eine analoge Methode die Gleichung

(30)
$$\int_0^1 \log|x-y|\,\varphi(y)\,dy = f(x)$$

[4]) Die zugehörige Abelsche Integralgleichung ist von Sonine, Acta mathematica 4 (1884) S. 171–176, behandelt worden.

auflösen[5]). Wir betrachten die analytische Funktion

31) $$F(x)=\int_0^1 \log(x-y)\varphi(y)dy.$$

Es gilt

32) $$F(x+i0)=\int_0^1 \log|x-y|\varphi(y)dy+\pi i\int_x^1 \varphi(y)dy,$$

33) $$F(x-i0)=\int_0^1 \log|x-y|\varphi(y)dy-\pi i\int_x^1 \varphi(y)dy$$

$(0<x<1).$

Ferner

34) $$F(x+i0)=\int_0^1 \log|x-y|\varphi(y)dy+\pi i\int_0^1 \varphi(y)dy,$$

35) $$F(x-i0)=\int_0^1 \log|x-y|\varphi(y)dy-\pi i\int_0^1 \varphi(y)dy$$

$(x<0).$

Somit infolge (30)

36) $$F(x+i0)+F(x-i0)=2f(x),$$

37) $$F(x+i0)-F(x-i0)=2\pi i\int_x^1 \varphi(y)dy$$

$(0<x<1),$

38) $$F(x+i0)-F(x-i0)=2\pi i\int_0^1 \varphi(y)dy \qquad (x<0).$$

Durch Differentiation finden wir

39) $$F'(x+i0)+F'(x-i0)=2f'(x),$$

40) $$F'(x+i0)-F'(x-i0)=-2\pi i\varphi(x)$$

$(0<x<1),$

41) $$F'(x+i0)-F'(x-i0)=0 \qquad (x<0).$$

$F'(x)$ ist somit eine in der längs (01) aufgeschnittenen $x$-Ebene indeutige Funktion.

Dasselbe gilt von

$$\Phi(x)=F'(x)\sqrt{x(x-1)}.$$

Wegen

$$F'(x+i0)=-i\frac{\Phi(x+i0)}{\sqrt{x(1-x)}},$$

$$F'(x-i0)=i\frac{\Phi(x-i0)}{\sqrt{x(1-x)}},$$

$(0<x<1)$

[5]) Diese Gleichung läßt sich auch, wie bekannt, mittels potentialtheoretischer ethoden behandeln.

ergibt sich aus (39) und (40):

$$\Phi(x+i0)-\Phi(x-i0)=2if'(x)\sqrt{x(1-x)}, \tag{42}$$

$$\Phi(x+i0)+\Phi(x-i0)=2\pi\varphi(x)\sqrt{x(1-x)}, \tag{43}$$

$(0<x<1)$.

Weil $\Phi(x)$ für $x\to\infty$ gegen die Konstante $K=\int_0^1\varphi(s)ds$ strebt, bekommen wir wegen (42) für $\Phi(x)$ die Formel

$$\Phi(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{f'(s)\sqrt{s(1-s)}}{s-x}ds+K. \tag{44}$$

Hieraus folgt

$$\Phi(x+i0)+\Phi(x-i0)=\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{f'(s)\sqrt{s(1-s)}}{s-x}ds+2K, \tag{45}$$

wo das Integral als Cauchyscher Hauptwert zu berechnen ist. Aus (43) findet man nun

$$\varphi(x)=\frac{1}{\pi^2}\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\int_0^1\frac{f'(s)\sqrt{s(1-s)}}{s-x}ds+\frac{K}{\pi}\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}. \tag{46}$$

Um die Konstante $K$ zu bestimmen, bemerken wir zunächst, daß aus der Formel (46) im Falle $f(x)=1$

$$\int_0^1\log|x-y|\frac{1}{\sqrt{y(1-y)}}dy=g$$

folgt, wo $g$ eine von $x$ unabhängige Konstante ist. Man findet leicht

$$g=-2\pi\log 2.$$

Multipliziert man nun (30) mit $\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ und integriert in bezug auf $x$ von Null bis Eins, so ergibt sich für $K=\int_0^1\varphi(s)ds$

$$K=-\frac{1}{2\pi\log 2}\int_0^1\frac{f(s)}{\sqrt{s(1-s)}}ds.$$

Wir haben somit für die Gleichung

$$\int_0^1\log|x-y|\varphi(y)dy=f(x)$$

die Auflösungsformel

$$\varphi(x)=\frac{1}{\pi^2}\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\int_0^1\frac{f'(s)\sqrt{s(1-s)}}{s-x}ds-\frac{1}{2\pi^2\log 2\cdot\sqrt{x(1-x)}}\int_0^1\frac{f(s)}{\sqrt{s(1-s)}}ds$$

erhalten.

(Eingegangen am 11. September 1921.)

# Über die Gestalt der Integralkurven einer ifferentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung eines singulären Punktes.

Von

Oskar Perron in Heidelberg.

## § 1.

## Die Aufgabe.

Poincaré und andere haben die Gestalt der Integralkurven der Differtialgleichung

$$[kx + ly + f(x, y)]\,dy = [mx + ny + \varphi(x, y)]\,dx \tag{1}$$

der Umgebung des Nullpunktes untersucht. Dabei sind $f(x, y)$ und $x, y)$ Potenzreihen, die mit Gliedern mindestens zweiter Dimension ginnen[1]). Wenn weiter ein für allemal

$$kn - lm \neq 0$$

rausgesetzt wird, so zeigt sich, daß die Integralkurven näherungsweise e die Integralkurven der einfacheren Differentialgleichung

$$(kx + ly)\,dy = (mx + ny)\,dx$$

h verhalten, und zwar sind die nachstehenden Fälle zu unterscheiden.

*Erster Fall*:

$$(k - n)^2 + 4\,lm > 0, \quad kn - lm > 0.$$

Der Nullpunkt ist ein *Knotenpunkt*; d. h. alle in hinreichender Nähe Nullpunktes verlaufenden Integralkurven gehen durch diesen hindurch l haben daselbst bestimmte Tangenten.

[1]) Über die Literatur vergleiche man die Artikel von Painlevé und Liebmann der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften II. 1. 1, §§ 24—30 und III D. 8, Eine ausführlichere Darstellung der wichtigsten Fälle findet sich in Abschnitt XII Buches von Horn, Gewöhnliche Differentialgleichungen beliebiger Ordnung. pzig 1905.

*Zweiter Fall*:

$$(k-n)^2+4lm>0, \qquad kn-lm<0.$$

Der Nullpunkt ist ein *Sattelpunkt*; d. h. durch ihn gehen nur zw Integralkurven, und zwar mit verschiedenen Tangentenrichtungen; s teilen die Umgebung in vier Winkelräume, in denen die anderen Integra kurven verlaufen.

*Dritter Fall*:

$$(k-n)^2+4lm=0.$$

Der Nullpunkt ist wieder ein Knotenpunkt.

*Vierter Fall*:

$$(k-n)^2+4lm<0, \qquad k+n\neq 0.$$

Der Nullpunkt ist ein *Strudelpunkt*; d. h. die Integralkurven winde sich unendlich oft um ihn herum und haben ihn zum asymptotischen Punk

*Fünfter Fall*:

$$(k-n)^2+4lm<0, \qquad k+n=0.$$

Der Nullpunkt ist im allgemeinen wieder ein Strudelpunkt. Ausnahms weise kann er aber auch in einen *Wirbelpunkt* ausarten; d. h. die Integra kurven sind geschlossene Kurven mit dem Nullpunkt im Innern.

Man kommt zu diesen Resultaten, indem man die Differentialgleichun durch gewisse unendliche Reihen integriert. Da es sich aber hier um di *Gestalt* der Integralkurven handelt, also alles im Reellen sich abspielt, s erscheint die Voraussetzung, daß $f(x, y)$ und $\varphi(x, y)$ Potenzreihen sind etwas weitgehend, und es liegt nahe, die Existenz und Gestalt der Integral kurven zu untersuchen, wenn im wesentlichen nur vorausgesetzt wird, da die Funktionen $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ im Vergleich zu den linearen Gliedern verhältnismäßig klein sind. Dann läßt sich die Integration nicht meh durch die Poincaréschen Reihen leisten; wir werden aber auf ander Weise zum Ziel kommen. Dabei wird sich in den vier ersten Fällen falls nicht allzuwenig über $f(x, y)$ und $\varphi(x, y)$ vorausgesetzt wird[2]) wieder das obige Resultat ergeben. Nur im fünften Fall tritt ein neue Typus hinzu, indem es vorkommen kann, daß unendlich viele geschlossene Integralkurven auftreten, und gleichzeitig solche, die sich unendlich oft um den Nullpunkt herumwinden und dabei zwei geschlossene Integral kurven zu asymptotischen Linien haben; dafür hat bereits Herr Liebmann a. a. O. ein Beispiel angegeben.

Indem ich die anderen Fälle für eine Fortsetzung aufspare, behandle ich in dieser Arbeit nur den ersten und dritten Fall, wo also ein Knoten-

[2]) Man vergleiche dagegen die Beispiele auf Seite 128 unten und 131.

nkt zu erwarten ist. Die Konstanten $k, l, m, n$, die Variablen $x, y$ wie die Funktionen $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ werden natürlich durchweg reell rausgesetzt. Als Hauptresultat wird sich dabei ergeben der

Fundamentalsatz. *Die Funktionen $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ mögen in ner gewissen Umgebung des Nullpunktes stetig sein und stetige partielle bleitungen $f'_x, f'_y, \varphi'_x, \varphi'_y$ besitzen; ferner sei*

$$f(0, 0) = 0, \quad \varphi(0, 0) = 0,$$

*d endlich möge es eine positive Zahl $\delta$ geben derart, daß*

$$\lim_{\substack{x=0 \\ y=0}} \frac{|f'_x(x, y)| + |f'_y(x, y)| + |\varphi'_x(x, y)| + |\varphi'_y(x, y)|}{(|x| + |y|)^{\delta}} = 0$$

. *Wenn dann einer der drei Fälle*

) $(k-n)^2 + 4lm > 0, \quad kn - lm \gtrless 0,$

I) $(k-n)^2 + 4lm = 0, \quad kn - lm \neq 0, \quad |l| + |m| = 0,$

II) $(k-n)^2 + 4lm = 0, \quad kn - lm \neq 0, \quad |l| + |m| > 0$

*rliegt, so geht durch jeden in genügender Nähe des Nullpunktes ge- enen, aber vom Nullpunkt verschiedenen Punkt $x_0, y_0$ genau eine tegralkurve der Differentialgleichung* (A), *und all diese Kurven gehen ch durch den Nullpunkt.*

*Im Fall* (I) *haben alle Kurven im Nullpunkt eine gemeinsame ngente mit Ausnahme einer einzigen, die eine andere Tangente hat.*

*Im Fall* (II) *geht in jeder Richtung genau eine Kurve durch den ullpunkt.*

*Im Fall* (III) *haben ausnahmslos alle Kurven im Nullpunkt eine meinsame Tangente, und zwar gibt es unter diesen Kurven eine, die n allen anderen zugleich durchsetzt wird.*

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Die drei Fälle sind in den drei Figuren veranschaulicht. In Fig. 3 die stärker gezeichnete Kurve die, welche von allen anderen durchsetzt d. Wesentlich ist also, daß ihr oberer Zweig nur auf der einen (rechten) te von anderen Kurven berührt wird, ihr unterer Zweig nur auf der leren (linken) Seite.

Daß durch den Punkt $x_0, y_0$ genau eine Integralkurve geht, ist leicht zu sehen. Denn nach dem Mittelwertsatz ist

$$f(x_0, y_0) = x_0 f'_x(\vartheta x_0, \vartheta y_0) + y_0 f'_y(\vartheta x_0, \vartheta y_0) \qquad (0 < \vartheta < 1)$$

also nach unseren Voraussetzungen gewiß

$$|f(x_0, y_0)| < \varepsilon(|x_0| + |y_0|),$$

und ebenso

$$|\varphi(x_0, y_0)| < \varepsilon(|x_0| + |y_0|),$$

wo $\varepsilon$ beliebig klein sein darf, wenn nur $|x_0|, |y_0|$ klein genug sind. Daraus ergibt sich, daß die Funktionen

$$(1) \qquad \begin{cases} kx + ly + f(x, y), \\ mx + ny + \varphi(x, y) \end{cases}$$

an der Stelle $x_0, y_0$ nicht beide zugleich verschwinden können; denn andernfalls würde daraus folgen:

$$(kn - lm)x_0 = -nf(x_0, y_0) + l\varphi(x_0, y_0),$$
$$(kn - lm)y_0 = \quad mf(x_0, y_0) - k\varphi(x_0, y_0);$$

also:

$$|x_0| \leqq \frac{|nf(x_0, y_0)| + |l\varphi(x_0, y_0)|}{|kn - lm|} < \varepsilon \frac{|n| + |l|}{|kn - lm|}(|x_0| + |y_0|),$$

$$|y_0| \leqq \frac{|mf(x_0, y_0)| + |k\varphi(x_0, y_0)|}{|kn - lm|} < \varepsilon \frac{|m| + |k|}{|kn - lm|}(|x_0| + |y_0|),$$

und daher durch Addition:

$$|x_0| + |y_0| < \varepsilon \frac{|n| + |l| + |m| + |k|}{|kn - lm|}(|x_0| + |y_0|),$$

was aber falsch ist, wenn $\varepsilon$ klein genug, also wenn $|x_0|, |y_0|$ klein genug. Von den beiden Funktionen (1) ist daher mindestens eine an der Stelle $x_0, y_0$ und wegen der Stetigkeit auch in einer gewissen Umgebung dieser Stelle von Null verschieden. Ist das etwa die erste, so kann man der Differentialgleichung (A) die Form geben:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{mx + ny + \varphi(x, y)}{kx + ly + f(x, y)}.$$

Hier ist die rechte Seite in der Umgebung von $x_0, y_0$ stetig und hat eine stetige partielle Ableitung nach $y$; daher ist gewiß die Lipschitz-Bedingung erfüllt, und folglich geht *eine und nur eine* Integralkurve durch den Punkt $x_0, y_0$.

Wenn aber die erste der Funktionen (1) an der Stelle $x_0, y_0$ verschwindet, so ist, wie wir sahen, die zweite von Null verschieden, und man kann der Differentialgleichung die Form geben:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{kx + ly + f(x, y)}{mx + ny + \varphi(x, y)}.$$

ier ist, wenn $y$ als die unabhängig Veränderliche betrachtet wird, wieder e Lipschitz-Bedingung erfüllt, so daß auch jetzt eine und nur eine tegralkurve durch den Punkt $x_0, y_0$ geht.

Der übrige Inhalt des Fundamentalsatzes ist wesentlich schwieriger beweisen. Wir behandeln zuerst einige Spezialfälle, wobei wir zum il mit noch viel geringeren Voraussetzungen über die Funktionen $x, y)$, $\varphi(x, y)$ auskommen werden.

## § 2.

## Der Spezialfall $k = 1$, $l = 0$, $n > 0$.

Hier handelt es sich um die Differentialgleichung

$$[x + f(x, y)]\,dy = [mx + ny + \varphi(x, y)]\,dx \qquad (n > 0),$$

e wir unter Einführung einer Hilfsveränderlichen $t$ durch das System setzen:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x - f(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= -mx - ny - \varphi(x, y) \qquad (n > 0). \end{aligned}\right.$$

Von diesem beweisen wir den

Satz 1. *Sind $\vartheta$, $a$, $b$ positive Zahlen, die den Ungleichungen genügen:*

$$\vartheta n b > |m|\,a, \qquad \vartheta < 1;$$

*nd ferner die Funktionen $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ im Bereich*

$$|x| < a, \quad |y| < b$$

*finiert und stetig und genügen sie daselbst den Ungleichungen*

$$|f(x, y)| \leqq \frac{\vartheta a}{a + b}(|x| + |y|),$$

$$|\varphi(x, y)| \leqq \frac{\vartheta n b - |m|\,a}{a + b}(|x| + |y|);$$

*nd endlich $x_0, y_0$ irgend zwei Zahlen des Bereiches*

$$|x_0| < a, \quad |y_0| < b:$$

*haben die Differentialgleichungen* (B) *mindestens ein System von tegralen $x = x(t)$, $y = y(t)$, welches für $t \geqq 0$ existiert, dauernd in m Bereich $|x| < a$, $|y| < b$ bleibt und für $t = 0$ die Werte*

$$x(0) = x_0, \qquad y(0) = y_0$$

*nimmt. Für jedes solche Integralsystem ist*

$$\lim_{t=\infty} x(t) = 0, \qquad \lim_{t=\infty} y(t) = 0.$$

Im Definitionsbereich der Funktionen $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ ist

$$|x + f(x, y)| < a + \frac{\vartheta a}{a+b}(a+b) < 2a,$$

$$|mx + ny + \varphi(x, y)| < |m|a + nb + \frac{\vartheta nb - |m|a}{a+b}(a+b)$$
$$= nb + \vartheta nb < 2nb.$$

Ferner gehört die Umgebung von $x_0, y_0$

$$|x - x_0| < a - |x_0|, \quad |y - y_0| < b - |y_0|$$

dem genannten Definitionsbereich an. Nach einem allgemeinen Existenzsatz[3]) gibt es also ein System von Integralen $x = x(t)$, $y = y(t)$ mit den Anfangswerten $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ mindestens im Intervall

$$0 \leqq t \leqq \operatorname{Min}\left(\frac{a - |x_0|}{2a}, \frac{b - |y_0|}{2nb}\right).$$

Möglicherweise gibt es sogar mehrere solche Systeme. Wir wollen zeigen, daß auch ein Integralsystem existiert, das sich bis zu beliebig großen Werten von $t$ fortsetzen läßt. Dazu beweisen wir zunächst, daß, soweit sich ein Integralsystem fortsetzen läßt, stets die Ungleichungen gelten

$$|x(t)| < ae^{-\varrho t}, \quad |y(t)| < be^{-\varrho t}, \tag{1}$$

wobei

$$\varrho = (1 - \vartheta)\operatorname{Min}(1, n), \tag{2}$$

also

$$0 < \frac{\vartheta}{1-\varrho} \leqq 1, \quad 0 < \frac{\vartheta n}{n-\varrho} \leqq 1. \tag{3}$$

Andernfalls sei nämlich $t_1$ die untere Grenze derjenigen Werte $t$, für welche die Ungleichungen (1) nicht beide gelten; dann ist

$$|x(t)| \leqq ae^{-\varrho t}, \quad |y(t)| \leqq be^{-\varrho t} \quad \text{für} \quad 0 \leqq t \leqq t_1,$$

und zwar gilt für $t = t_1$ mindestens einmal Gleichheit. Nun folgt aus den Differentialgleichungen (B), indem man die erste mit $e^t$, die zweite mit $e^{nt}$ multipliziert und dann beide von 0 bis $t_1$ integriert:

$$e^{t_1}x(t_1) = x_0 - \int_0^{t_1} f(x(t), y(t))e^t dt,$$

$$e^{nt_1}y(t_1) = y_0 - \int_0^{t_1} [mx(t) + \varphi(x(t), y(t))]e^{nt} dt.$$

[3]) Satz 2 meiner Arbeit: Ein neuer Existenzbeweis für die Integrale eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen, Math. Ann. 78 (1918), S. 378–384.

aher mit Rücksicht auf unsere Voraussetzungen:

$$e^{\varrho t_1}|x(t_1)| < a + \int_0^{t_1} \frac{\vartheta a}{a+b}(ae^{-\varrho t} + be^{-\varrho t})e^{t}dt$$

$$= a + \frac{\vartheta a}{1-\varrho}(e^{(1-\varrho)t_1} - 1) \leqq a + a(e^{(1-\varrho)t_1} - 1) = ae^{(1-\varrho)t_1},$$

d ebenso:

$$e^{nt_1}|y(t_1)| < b + \int_0^{t_1} \left[|m|ae^{-\varrho t} + \frac{\vartheta nb - |m|a}{a+b}(ae^{-\varrho t} + be^{-\varrho t})\right] e^{nt}dt$$

$$= b + \frac{\vartheta nb}{n-\varrho}(e^{(n-\varrho)t_1} - 1) \leqq b + b(e^{(n-\varrho)t_1} - 1) = be^{(n-\varrho)t_1};$$

o schließlich:

$$|x(t_1)| < ae^{-\varrho t_1}, \quad |y(t_1)| < be^{-\varrho t_1},$$

Widerspruch damit, daß mindestens einmal Gleichheit gelten muß. mit sind die Ungleichungen (1) bewiesen.

Wenn nun kein Integralsystem bis zu beliebig großen Werten von $t$ tgesetzt werden könnte, so sei $T$ die obere Grenze derjenigen Werte $t$, zu denen eine Fortsetzung möglich ist. Sei ferner $t_0$ eine Zahl, die iebig wenig kleiner als $T$ ist. Dann gibt es nach dem oben angezogenen gemeinen Existenzsatz ein Integralsystem mindestens im Intervall

$$t_0 \leqq t \leqq t_0 + \operatorname{Min}\left(\frac{a - |x(t_0)|}{2a}, \frac{b - |y(t_0)|}{2nb}\right),$$

o wegen (1) mindestens im Intervall

$$t_0 \leqq t \leqq t_0 + \frac{1 - e^{-\varrho t_0}}{2 + 2n}.$$

er ist aber die rechte Seite größer als $T$, wenn nur $t_0$ nahe genug an $T$ genommen wird. Also gibt es ein Integralsystem, das sich über $T$ hinaus tsetzen läßt, im Widerspruch mit unserer Annahme.

Nachdem hiermit die Fortsetzbarkeit bis zu beliebig großen $t$ sicher- tellt ist, folgt sogleich aus (1):

$$\lim_{t=\infty} x(t) = 0, \quad \lim_{t=\infty} y(t) = 0,$$

mit Satz 1 vollständig bewiesen ist.

Setzt man in Satz 1 speziell $f(x, y) = 0$, so lautet die erste Diffe- tialgleichung des Systems (B):

$$\frac{dx}{dt} = -x.$$

raus folgt:

$$x = x_0 e^{-t},$$

und wenn $x_0 \neq 0$, so ist also auch umgekehrt $t$ eine eindeutige Funkti
von $x$. Setzt man diese in $y = y(t)$ ein, so erweist sich $y$ als eindeuti
Funktion von $x$ und genügt als solche der Differentialgleichung

$$x\frac{dy}{dx} = mx + ny + \varphi(x, y) \qquad (n >$$

Wir erhalten somit

Satz 2. *Genügen die positiven Zahlen $\vartheta$, $a$, $b$, $n$ und die ree
Zahl $m$ den Ungleichungen*:

$$\vartheta n b > |m| a, \quad \vartheta < 1;$$

*ist ferner die Funktion $\varphi(x, y)$ im Bereich*

$$|x| < a, \quad |y| < b$$

*definiert und stetig und genügt sie daselbst der Ungleichung*

$$|\varphi(x, y)| \leqq \frac{\vartheta n b - |m| a}{a + b}(|x| + |y|);$$

*sind endlich $x_0$, $y_0$ irgend zwei Zahlen des Bereiches*

$$0 < |x_0| < a, \quad |y_0| < b:$$

*so hat die Differentialgleichung*

$$x\frac{dy}{dx} = mx + ny + \varphi(x, y) \qquad (n >$$

*mindestens ein Integral $y$, das für $x = x_0$ den Wert $y_0$ annimmt un
für $x \to 0$ ebenfalls dem Grenzwert Null zustrebt.*

## § 3.

### Weitere Einschränkungen zur Erzwingung eines Knotenpunktes.

Nach Satz 1 münden die Integralkurven des Systems (B)

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

für $t \to \infty$ in den Nullpunkt ein. Damit ist aber noch nicht gesagt, da
der Nullpunkt ein Knotenpunkt ist; denn die Kurven brauchen in ihr
keine Tangenten zu haben und können ihn beispielsweise auch nach de
Art eines Strudelpunktes unendlich oft umwinden. Ein Beispiel dafür is
das System

$$\frac{dx}{dt} = -x + \frac{2y}{\log(x^2 + y^2)},$$

$$\frac{dy}{dt} = -y - \frac{2x}{\log(x^2 + y^2)},$$

bei dem in hinreichender Nähe des Nullpunktes die Voraussetzungen vo
Satz 1 erfüllt sind. Durch Einführung von Polarkoordinaten

$$x = r\cos\omega, \quad y = r\sin\omega$$

t aber das System über in:

$$\frac{dr}{dt} = -r, \qquad \frac{d\omega}{dt} = -\frac{1}{\log r} = \frac{1}{\log \frac{1}{r}}.$$

er kann man sofort integrieren und findet:

$$r = r_0 e^{-t}, \qquad \omega = \omega_0 + \log\left(t + \log\frac{1}{r_0}\right) - \log\log\frac{1}{r_0}.$$

r $t \to \infty$ nimmt also $r$ nach Null ab, während $\omega$ unbegrenzt wächst, daß der Nullpunkt ein Strudelpunkt ist und kein Knotenpunkt.

Um daher im Nullpunkt eine bestimmte Tangentenrichtung zu erngen, sind weitere Voraussetzungen notwendig. In dieser Richtung unterhen wir zunächt die speziellere Differentialgleichung

$$x\frac{dy}{dx} = ny + \varphi(x, y) \qquad (n > 1).$$

Satz 3. *Wenn die Funktion $\varphi(x, y)$ in der Umgebung des Nullnktes stetig ist und der Bedingung genügt*:

$$\lim_{\substack{x=0\\y=0}} \frac{\varphi(x, y)}{|x| + |y|} = 0,$$

*n gilt für jedes Integral $y = y(x)$ der Differentialgleichung* (C), *wels für $x \to 0$ dem Grenzwert Null zustrebt*[4]), *die Gleichung*

$$\lim_{x=0} \frac{y(x)}{x} = 0.$$

Man beachte, daß der Satz nicht mehr gelten würde, wenn in (C) $\leqq 1$ wäre, weil ihm dann schon die Differentialgleichung

$$x\frac{dy}{dx} = ny$$

dem allgemeinen Integral $y = C|x|^n$ offenbar widersprechen würde.

Wir wollen Satz 3 jetzt für positive $x$ beweisen; indem man $x = -x'$ zt, ergibt er sich dann auch für negative $x$. Aus der Differentialchung (C) folgt, indem man sie mit $x^{-n-1}$ multipliziert und dann $x_1$ bis $x_0$ integriert:

$$x_0^{-n} y(x_0) - x_1^{-n} y(x_1) = \int_{x_1}^{x_0} \varphi(x, y(x)) x^{-n-1}\, dx \qquad (0 < x_1 < x_0).$$

ch den Voraussetzungen von Satz 3 kann man aber nach Vorgabe einer ebig kleinen Zahl $\varepsilon$ ein so kleines $x_0$ angeben, daß

$$|\varphi(x, y(x))| < \varepsilon(x + |y(x)|) \quad \text{für} \quad 0 < x \leqq x_0,$$

[4]) Nach Satz 2 gibt es solche Integrale.

und dann folgt aus der vorigen Gleichung:

$$(1) \quad x_1^{-n}|y(x_1)| < x_0^{-n}|y(x_0)| + \varepsilon \int_{x_1}^{x_0} (x + |y(x)|)\, x^{-n-1}\, dx \quad (0 < x_1 < x$$

Wäre nun nicht, wie in Satz 3 behauptet,

$$\lim_{x=0} \frac{y(x)}{x} = 0,$$

so könnte man eine positive Zahl $g$ angeben derart, daß

$$\limsup_{x=0} \frac{|y(x)|}{x} > g$$

ist[5]). Dann ließen sich zu jeder beliebig kleinen Zahl $\delta$ zwei Zahlen und $G$, und zwar

$$0 < x_1 < \delta, \qquad G > g$$

ausfindig machen derart, daß

$$\frac{|y(x_1)|}{x_1} > G > g,$$

$$\frac{|y(x)|}{x} < 2G \quad \text{für} \quad x_1 \leqq x \leqq x_0$$ [6])

ist. Aus (1) würde dann folgen:

$$G x_1^{1-n} < x_1^{-n}|y(x_1)| < x_0^{-n}|y(x_0)| + \varepsilon \int_{x_1}^{x_0} (x + 2Gx)\, x^{-n-1}\, dx$$

$$< x_0^{-n}|y(x_0)| + \frac{\varepsilon(1+2G)}{n-1}\, x_1^{1-n},$$

oder also:

$$G < x_0^{-n}|y(x_0)|\, x_1^{n-1} + \frac{\varepsilon}{n-1}(1+2G),$$

oder:

$$G\left(1 - \frac{2\varepsilon}{n-1}\right) < \frac{\varepsilon}{n-1} + x_0^{-n}|y(x_0)|\, x_1^{n-1},$$

und um so mehr:

$$g\left(1 - \frac{2\varepsilon}{n-1}\right) < \frac{\varepsilon}{n-1} + x_0^{-n}|y(x_0)|\, \delta^{n-1}.$$

Diese Ungleichung ist aber falsch, wenn $\varepsilon$ und $\delta$ hinreichend klein gewählt sind (man beachte, daß $x_0$ zwar von $\varepsilon$, aber nicht von $\delta$ abhängt). Damit ist Satz 3 bewiesen.

---

[5]) Damit werden die beiden Fälle, daß der lim sup endlich oder unendlich ist, beide zugleich umfaßt.

[6]) Hier kann es nötig werden, für $x_0$ eine etwas kleinere Zahl zu wählen; doch bleibt $x_0$ dann fest und jedenfalls von $\delta$ unabhängig.

§ 4.

**Der Fall $k = n = 1$, $l = m = 0$, wenn $f(x, y) = 0$ ist.**

Schon oben wurde darauf hingewiesen, daß Satz 3 für $n = 1$ nicht ehr gilt. Betrachten wir jetzt diesen Fall, also die Differentialgleichung

$$x\frac{dy}{dx} = y + \varphi(x, y).$$

Speziell für $\varphi(x, y) = 0$ sind die Integralkurven die Geraden $y = Cx$, daß *in jeder Richtung* eine Integralkurve durch ihn hindurchgeht (außer Richtung der $y$-Achse). Wenn man in Analogie zu Satz 3 etwa ver-utet, daß es bei dem System (D) ebenso ist, wenn nur

$$\lim_{\substack{x=0\\y=0}} \frac{\varphi(x, y)}{|x| + |y|} = 0$$

rausgesetzt wird, so ist diese Vermutung falsch. Vielmehr kann es dann ispielsweise sein, daß alle Integralkurven die $Y$-Achse berühren; z. B. bei r Differentialgleichung

$$x\frac{dy}{dx} = y - \frac{x}{\log\frac{1}{|x|}}$$

t dem allgemeinen Integral

$$y = x\left(C + \log\log\frac{1}{|x|}\right)$$

t offenbar für jedes Integral die Gleichung

$$\lim_{x=0} \frac{y}{x} = \infty.$$

Es kann aber auch sein, daß die Integralkurven im Nullpunkt über-upt keine Tangenten haben; z. B. bei der Differentialgleichung

$$x\frac{dy}{dx} = y - \frac{x\cos\log\log\frac{1}{|x|}}{\log\frac{1}{|x|}}$$

t dem allgemeinen Integral

$$y = x\left(C + \sin\log\log\frac{1}{|x|}\right)$$

offenbar

$$\limsup_{x=0} \frac{y}{x} = C + 1,$$

$$\liminf_{x=0} \frac{y}{x} = C - 1,$$

daß keine Integralkurve im Nullpunkt eine Tangente hat.

Diese Beispiele lehren, daß wir, um zu erzwingen, daß in jeder Ric tung Integralkurven durch den Nullpunkt gehen, von der Funktion $\varphi(x,$ etwas mehr voraussetzen müssen. Wir beweisen in dieser Hinsicht

Satz 4. *Wenn die Funktion $\varphi(x,y)$ in einer gewissen Umgebu des Nullpunktes stetig ist, und wenn es eine positive Zahl $\delta$ derart gibt, d*

$$\lim_{\substack{x=0\\y=0}} \frac{\varphi(x,y)}{(|x|+|y|)^{1+\delta}} = 0$$

*ist, dann hat die Differentialgleichung* (D) *sowohl für positive als f negative absolut hinreichend kleine $x$ mindestens ein Integral $y = y(x$ für welches der Grenzwert*

$$\lim_{x=0} \frac{y(x)}{x}$$

*existiert und einen vorgegebenen endlichen Wert $c$ hat.*

Es genügt wieder, den Beweis für positive $x$ zu führen. Setzt ma dann $y = xz$, so geht die Differentialgleichung (D) über in:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\varphi(x,xz)}{x^2}, \tag{1}$$

und es kommt nur darauf an, zu zeigen, daß diese neue Differentialgleichun ein Integral $z$ hat, welches für $x \to +0$ dem Grenzwert $c$ zustrebt. Z dem Zweck definieren wir eine Funktion $\omega(x,z)$ durch die Gleichung

$$\begin{cases} \omega(x,z) = \dfrac{\varphi(x,xz)}{\delta x^{1+\delta}} \text{ für } x > 0, \\ \omega(0,z) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Nach den Voraussetzungen von Satz 4 ist dann $\omega(x,z)$ in einem gewisse Bereich

$$0 \leqq x \leqq a, \quad |z-c| \leqq b \tag{3}$$

stetig, und unsere Differentialgleichung geht über in:

$$\frac{1}{\delta x^{\delta-1}} \frac{dz}{dx} = \omega(x,z) \quad \text{für} \quad x > 0$$

oder wenn man $x^\delta = v$ setzt:

$$\frac{dz}{dv} = \omega\left(v^{\frac{1}{\delta}}, z\right). \tag{4}$$

Für diese Differentialgleichung ist aber $v = 0$ gar kein singulärer Punk mehr, und sie hat nach dem in Fußnote [3]) angezogenen Existenzsat mindestens ein Integral, das für $v = 0$, d. h. für $x = 0$ den Wert $z =$ annimmt; w. z. b. w.

## § 5.

**Der Fall $k = n = 1$, $l = 0$, $m \neq 0$, wenn $f(x, y) = 0$ ist.**

Hier handelt es sich um die Differentialgleichung

$$x\frac{dy}{dx} = y + mx + \varphi(x, y) \qquad (m \neq 0).$$

Satz 5. *Wenn die Funktion $\varphi(x, y)$ in einer gewissen Umgebung s Nullpunktes stetig ist, und wenn es eine positive Zahl $\delta$ derart gibt, daß*

$$\lim_{\substack{x=0\\y=0}} \frac{\varphi(x, y)}{(|x| + |y|)^{1+\delta}} = 0$$

*t, dann gilt für jedes Integral $y = y(x)$ der Differentialgleichung* (E), *elches für absolut hinreichend kleine, sei es positive oder negative, existiert und für $x \to 0$ dem Grenzwert Null zustrebt*[7]*), zugleich die zziehung*

$$\lim_{x=0} \frac{y(x)}{mx} = -\infty.$$

Auch hier genügt es wieder, den Satz für positive $x$ zu beweisen. enn man die Differentialgleichung (E) durch $mx^2$ dividiert und dann n $x_1$ bis $x_0$ integriert, erhält man:

$$\frac{y(x_1)}{mx_1} + \log\frac{1}{x_1} = \frac{y(x_0)}{mx_0} + \log\frac{1}{x_0} - \int_{x_1}^{x_0} \frac{\varphi(x, y(x))}{mx^2}\,dx \qquad (0 < x_1 < x_0).$$

un bezeichnen wir mit $\vartheta$ eine festgewählte Zahl des Intervalles

$$0 < \vartheta < \frac{\delta}{1+\delta}$$

d setzen

$$(1 - \vartheta)(1 + \delta) = 1 + \varrho,$$

daß $\varrho > 0$ ist. Nach den Voraussetzungen von Satz 5 kann man dann so klein wählen, daß $x_0 < 1$ und

$$|\varphi(x, y(x))| < (x + |y(x)|)^{1+\delta} < \frac{\vartheta}{2}(x + |y(x)|) \quad \text{für } 0 < x \leqq x_0.$$

Nun zeigen wir zunächst, daß

$$\limsup_{x=0} \frac{|y(x)|}{x^{1-\vartheta}} = \text{endlich}$$

. Denn andernfalls könnte man eine beliebig große Zahl $G$ und eine liebig kleine Zahl $x_1$ ausfindig machen derart, daß

$$\frac{|y(x)|}{x^{1-\vartheta}} \leqq G \quad \text{für} \quad x_1 \leqq x \leqq x_0$$

[7]) Nach Satz 2 gibt es solche Integrale.

und zwar Gleichheit für $x = x_1$. Dann würde aus (1) mit Rücksicht auf (2) folgen:

$$\frac{G x_1^{-\vartheta}}{|m|} = \frac{|y(x_1)|}{|m| x_1} < \log\frac{1}{x_1} + \left|\frac{y(x_0)}{m x_0} + \log\frac{1}{x_0}\right| + \int_{x_1}^{x_0} \frac{\vartheta}{2} \frac{x + |y(x)|}{|m| x^2} dx$$

$$< \log\frac{1}{x_1} + \left|\frac{y(x_0)}{m x_0} + \log\frac{1}{x_0}\right| + \int_{x_1}^{x_0} \frac{\vartheta}{2} \frac{x^{1-\vartheta} + G x^{1-\vartheta}}{|m| x^2} dx$$

$$< \log\frac{1}{x_1} + \left|\frac{y(x_0)}{m x_0} + \log\frac{1}{x_0}\right| + \frac{\vartheta(1+G)}{2|m|} \frac{x_1^{-\vartheta}}{\vartheta};$$

oder also:

$$G < |m| x_1^{\vartheta} \log\frac{1}{x_1} + \left|\frac{y(x_0)}{m x_0} + \log\frac{1}{x_0}\right| |m| x_1^{\vartheta} + \frac{1+G}{2}.$$

Da aber $G$ beliebig groß und $x_1$ beliebig klein sein kann, ist das nur möglich. Damit ist die Formel (3) bewiesen. Da aber die gleiche Überlegung auch gilt, wenn $\vartheta$ durch eine etwas kleinere Zahl ersetzt wird, so kann der lim sup in (3) nur Null sein. Hiernach können wir $x_0 (< 1)$ so klein denken, daß außer der Ungleichung (2) auch die folgende besteht:

$$|y(x)| < x^{1-\vartheta} \quad \text{für} \quad 0 < x \leqq x_0. \tag{4}$$

Dann folgt aber aus (1) mit Hilfe von (2) und (4):

$$\left|\frac{y(x_1)}{m x_1} + \log\frac{1}{x_1}\right| < \left|\frac{y(x_0)}{m x_0} + \log\frac{1}{x_0}\right| + \int_{x_1}^{x_0} \frac{(x + |y(x)|)^{1+\delta}}{|m| x^2} dx$$

$$< \left|\frac{y(x_0)}{m x_0} + \log\frac{1}{x_0}\right| + \int_{x_1}^{x_0} \frac{(x^{1-\vartheta} + x^{1-\vartheta})^{1+\delta}}{|m| x^2} dx$$

$$= \left|\frac{y(x_0)}{m x_0} + \log\frac{1}{x_0}\right| + \int_{x_1}^{x_0} \frac{2^{1+\delta} x^{1+\varrho}}{|m| x^2} dx$$

$$< \left|\frac{y(x_0)}{m x_0} + \log\frac{1}{x_0}\right| + \frac{2^{1+\delta}}{|m| \varrho} x_0^{\varrho}.$$

Da das gilt, wie klein auch $x_1$ ist, so ergibt sich:

$$\limsup_{x=0} \left|\frac{y(x)}{m x} + \log\frac{1}{x}\right| = \text{endlich},$$

und folglich:

$$\lim_{x=0} \frac{y(x)}{m x} = -\infty. \qquad \text{W. z. b. w.}$$

## § 6.

## Existenz einer die $Y$-Achse berührenden Integralkurve im Fall $k = 1,\ l = 0,\ n \geqq 1$.

Wir wenden uns jetzt zu der Differentialgleichung

$$[x + f(x, y)]\,dy = [mx + ny + \varphi(x, y)]\,dx \qquad (n \geqq 1).$$

ese werden wir im nächsten Paragraphen auf die bereits behandelten ezialfälle, wo $f(x, y) = 0$ ist, dadurch zurückführen, daß wir eine die Achse berührende Integralkurve als neue krummlinige $Y$-Achse ein- ıren. Um zunächst die Existenz einer derartigen Integralkurve be- isen zu können, müssen wir über die Funktionen $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ was mehr voraussetzen.

Satz 6. *Sind $a$, $b$, $\delta$ positive Zahlen, die den Ungleichungen nügen:*

$$a + b \leqq 1, \qquad |m|\,a \leqq \frac{nb\delta}{4};$$

*nd ferner die Funktionen $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ im Bereich*

$$|x| \leqq a, \quad |y| \leqq b$$

*finiert und stetig und genügen sie daselbst den Ungleichungen*

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| \leqq \frac{na\delta}{2}\left(\frac{|x_1| + |x_2| + |y_1| + |y_2|}{2}\right)^{\delta}(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|),$$

$$|\varphi(x_1, y_1) - \varphi(x_2, y_2)| \leqq \frac{nb\delta}{4}\left(\frac{|x_1| + |x_2| + |y_1| + |y_2|}{2}\right)^{\delta}(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|);$$

*endlich $f(0, 0) = 0$, $\varphi(0, 0) = 0$: so hat die Differentialgleichung (F) dem Intervall*

$$0 \leqq |y| < \frac{b\delta}{2(1+\delta)}\left(\frac{1}{1+\delta}\right)^{\frac{1}{\delta}}$$

*ndestens ein Integral der Form $x = \Omega(y)$, wo $\Omega(y)$ in diesem Inter- ll stetig ist und eine stetige Ableitung $\Omega'(y)$ besitzt. Außerdem ist*

$$\lim_{y=0} \frac{\Omega(y)}{|y|^{1+\sigma}} = 0, \quad \lim_{y=0} \frac{\Omega'(y)}{|y|^{\sigma}} = 0 \quad \text{für } \sigma < \delta,$$

*daß die Kurve $x = \Omega(y)$ im Nullpunkt die Y-Achse berührt.*

Zum Beweis dieses Satzes bemerken wir zunächst, daß aus unsern raussetzungen weiter folgt:

$$\begin{cases} |f(x, y)| \leqq na\delta(|x| + |y|)^{1+\delta}, \\ |\varphi(x, y)| \leqq \frac{nb\delta}{4}(|x| + |y|)^{1+\delta}. \end{cases}$$

Nun definieren wir gewisse Funktionen

$$x_\nu = x_\nu(t), \qquad y_\nu = y_\nu(t) \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

einer Variablen $t$, die $\geqq 0$ sein soll, rekursorisch durch die Formeln

$$x_1 = 0, \qquad y_1 = 0, \tag{2}$$

$$\begin{cases} x_{\nu+1} = e^{-t} \int_t^\infty f(x_\nu, y_\nu)\, e^t\, dt, \\ y_{\nu+1} = e^{-nt} \left\{ \frac{b}{2} + \int_t^\infty [m x_\nu + \varphi(x_\nu, y_\nu)]\, e^{nt}\, dt \right\}. \end{cases} \tag{3}$$

Man sieht leicht, daß diese Integrale existieren, und daß die Funktionen $x_\nu, y_\nu$ den Ungleichungen genügen:

$$\begin{cases} |x_\nu| \leqq a e^{-nt(1+\delta)} \leqq a e^{-nt}, \\ |y_\nu| \leqq b e^{-nt}, \end{cases} \tag{4}$$

also für $t \geqq 0$ nie aus dem Definitionsbereich von $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ heraus ausfallen, so daß die sukzessive Berechnung möglich ist. In der Tat sind die Ungleichungen (4) für $\nu = 1$ wegen (2) richtig. Gelten sie aber für einen bestimmten Wert $\nu$, so ist auf Grund unserer Voraussetzungen über die Zahlen $a, b$

$$|x_\nu| + |y_\nu| \leqq e^{-nt},$$

$$|m x_\nu| \leqq |m|\, a e^{-nt(1+\delta)} \leqq \frac{nb\delta}{4} e^{-nt(1+\delta)}.$$

Also folgt aus (3) mit Rücksicht auf (1):

$$|x_{\nu+1}| \leqq e^{-t} \int_t^\infty n a \delta\, e^{-nt(1+\delta)}\, e^t\, dt = \frac{na\delta}{n\delta + n - 1} e^{-nt(1+\delta)} \leqq a e^{-nt(1+\delta)},$$

weil in (F) ja $n \geqq 1$ sein soll. Ebenso:

$$\begin{aligned} |y_{\nu+1}| &\leqq e^{-nt} \left\{ \frac{b}{2} + \int_t^\infty \left[ \frac{nb\delta}{4} e^{-nt(1+\delta)} + \frac{nb\delta}{4} e^{-nt(1+\delta)} \right] e^{nt}\, dt \right\} \\ &= e^{-nt} \left\{ \frac{b}{2} + \frac{b}{2} e^{-nt\delta} \right\} \leqq b e^{-nt}. \end{aligned}$$

Die Ungleichungen (4) bleiben also auch richtig, wenn man $\nu$ durch $\nu + 1$ ersetzt, und gelten daher allgemein.

Nun beweisen wir die weiteren Ungleichungen:

$$\begin{cases} |x_\nu - x_{\nu-1}| \leqq \frac{a e^{-nt(1+\delta)}}{2^{\nu-1}} \leqq \frac{a e^{-nt}}{2^{\nu-1}}, \\ |y_\nu - y_{\nu-1}| \leqq \frac{b e^{-nt}}{2^{\nu-1}}. \end{cases} \tag{5}$$

unächt ist nämlich

$$x_2 - x_1 = 0, \qquad y_2 - y_1 = \frac{b}{2} e^{-nt},$$

o daß für $\nu = 2$ die Formeln (5) richtig sind. Wenn sie aber für irgend inen Wert $\nu$ gelten, so ist mit Rücksicht auf die Voraussetzungen von atz 6 und mit Rücksicht auf (4)

$$|f(x_\nu, y_\nu) - f(x_{\nu-1}, y_{\nu-1})| \leqq \frac{na\delta}{2} e^{-nt\delta} \frac{e^{-nt}}{2^{\nu-1}},$$

$$|\varphi(x_\nu, y_\nu) - \varphi(x_{\nu-1}, y_{\nu-1})| \leqq \frac{nb\delta}{4} e^{-nt\delta} \frac{e^{-nt}}{2^{\nu-1}}.$$

Daher folgt aus (3):

$$|x_{\nu+1} - x_\nu| \leqq e^{-t} \int_t^\infty \frac{na\delta}{2} e^{-nt\delta} \frac{e^{-nt}}{2^{\nu-1}} e^t dt = \frac{na\delta}{2^\nu} \frac{e^{-nt(1+\delta)}}{n\delta + n - 1} \leqq \frac{ae^{-nt(1+\delta)}}{2^\nu},$$

eil ja $n \geqq 1$ ist; und ebenso:

$$|y_{\nu+1} - y_\nu| \leqq e^{-nt} \int_t^\infty \left[ \frac{|m| ae^{-nt(1+\delta)}}{2^{\nu-1}} + \frac{nb\delta}{4} e^{-nt\delta} \frac{e^{-nt}}{2^{\nu-1}} \right] e^{nt} dt$$

$$\leqq e^{-nt} \int_t^\infty \frac{nb\delta}{2} \frac{e^{-nt\delta}}{2^{\nu-1}} dt = \frac{be^{-nt(1+\delta)}}{2^\nu} \leqq \frac{be^{-nt}}{2^\nu}.$$

Damit ist die Allgemeingültigkeit der Ungleichungen (5) bewiesen. us ihnen ergibt sich aber sofort die Existenz der Grenzwerte

6)
$$\begin{cases} \lim\limits_{\nu=\infty} x_\nu = x = x(t), \\ \lim\limits_{\nu=\infty} y_\nu = y = y(t), \end{cases}$$

nd zwar gilt die Fehlerabschätzung:

7)
$$\begin{cases} |x - x_\nu| \leqq \dfrac{ae^{-nt(1+\delta)}}{2^{\nu-1}} \leqq \dfrac{ae^{-nt}}{2^{\nu-1}}, \\ |y - y_\nu| \leqq \dfrac{be^{-nt}}{2^{\nu-1}}. \end{cases}$$

ußerdem ist wegen (4) auch

8)
$$\begin{cases} |x| \leqq ae^{-nt(1+\delta)} \leqq ae^{-nt}, \\ |y| \leqq be^{-nt}, \end{cases}$$

daß auch die Funktionswerte von $x, y$ nie aus dem Definitionsbereich on $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ herausfallen.

Aus den Voraussetzungen von Satz 6 folgt dann weiter wegen (4), (8) und (7):

$$|f(x, y) - f(x_\nu, y_\nu)| \leqq \frac{na\delta}{2} e^{-nt\delta} \frac{e^{-nt}}{2^{\nu-1}},$$

$$|\varphi(x, y) - \varphi(x_\nu, y_\nu)| \leqq \frac{nb\delta}{4} e^{-nt\delta} \frac{e^{-nt}}{2^{\nu-1}},$$

und daher ist

$$\lim_{\nu=\infty} \int_t^\infty f(x_\nu, y_\nu) e^t dt = \int_t^\infty f(x, y) e^t dt,$$

$$\lim_{\nu=\infty} \int_t^\infty [mx_\nu + \varphi(x_\nu, y_\nu)] e^{nt} dt = \int_t^\infty [mx + \varphi(x, y)] e^{nt} dt.$$

Somit erhält man schließlich aus (3), indem man $\nu$ unbegrenzt wachsen läßt:

$$(9) \qquad \begin{cases} x = e^{-t} \int_t^\infty f(x, y) e^t dt, \\ y = e^{-nt} \left\{ \frac{b}{2} + \int_t^\infty [mx + \varphi(x, y)] e^{nt} dt \right\}. \end{cases}$$

Multipliziert man aber diese Gleichungen mit $e^t$ bzw. $e^{nt}$ und differenziert sie dann nach $t$, so folgt:

$$(10) \qquad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - f(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = -ny - mx - \varphi(x, y). \end{cases}$$

Daraus erkennt man, daß die Kurve mit den Gleichungen

$$x = x(t), \qquad y = y(t)$$

eine Integralkurve der Differentialgleichung (F) ist, die wegen (8) für $t \to \infty$ in den Nullpunkt einmündet. Wir wollen jetzt zeigen, daß sie im Nullpunkt die positive $Y$-Achse berührt und daß sie auch eine Gleichung der Form $x = \Omega(y)$ hat.

Nach (1) und (8) ist

$$(11) \qquad |mx + \varphi(x, y)| \leqq |m| a e^{-nt(1+\delta)} + \frac{nb\delta}{4} e^{-nt(1+\delta)} \leqq \frac{nb\delta}{2} e^{-nt(1+\delta)}.$$

Daher

$$\left| \int_t^\infty [mx + \varphi(x, y)] e^{nt} dt \right| \leqq \int_t^\infty \frac{nb\delta}{2} e^{-nt\delta} dt = \frac{b}{2} e^{-nt\delta}.$$

Aus der zweiten Gleichung (9) folgt somit

$$(12) \qquad y \geqq \frac{b}{2} e^{-nt}(1 - e^{-nt\delta}).$$

Setzt man jetzt zur Abkürzung

3) $$\frac{1}{n\delta}\log(1+\delta)=t_0,$$

4) $$\frac{b\delta}{2(1+\delta)}\left(\frac{1}{1+\delta}\right)^{\frac{1}{\delta}}=y_0,$$

ist nach (12) insbesondere

$$y(t_0)\geqq y_0.$$

ür $t>t_0$ aber ist $(1+\delta)e^{-nt\delta}<1$, also

$$1-e^{-nt\delta}>\delta e^{-nt\delta},$$

daß aus (11) und (12) folgt:

$$ny>|mx+\varphi(x,y)|,$$

nd folglich nach der zweiten Gleichung (10):

5) $$\frac{dy}{dt}<0 \quad \text{für} \quad t>t_0.$$

Wenn daher $t$ von $t_0$ an unbegrenzt wächst, so nimmt $y$ dauernd ab, nd zwar von einem Wert, der mindestens gleich $y_0$ ist, angefangen bis erab nach Null (wegen (8)). Daher ist auch umgekehrt im Intervall

6) $$0<y<y_0$$

eine eindeutige Funktion von $y$. Setzt man diese in die Funktion $=x(t)$ ein, so erweist sich auch $x$ als eine Funktion von $y$:

$$x=\Omega(y),$$

ie im Intervall (16) existiert, eine stetige Ableitung $\Omega'(y)$ besitzt[8]) nd für $y\to 0$ wegen (8) ebenfalls dem Grenzwert Null zustrebt. Wir önnen also zum Intervall (16) noch den Anfangspunkt $y=0$ hinzu-ehmen und definieren

7) $$\Omega(0)=0.$$

Aus (12) und (8) folgt weiter:

8) $$\lim_{y=0}\frac{\Omega(y)}{y^{1+\sigma}}=\lim_{t=\infty}\frac{x(t)}{[y(t)]^{1+\sigma}}=0 \quad \text{für} \quad \sigma<\delta,$$

[8]) Es ist nämlich

$$\Omega'(y)=\frac{dx}{dy}=\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}}=\frac{x+f(x,y)}{ny+mx+\varphi(x,y)},$$

d hier sind Zähler und Nenner *stetige* Funktionen von $t$.

woraus sich auch die Differenzierbarkeit an der Stelle $y = 0$ ergibt, und zwar ist

$$\Omega'(0) = 0. \tag{19}$$

Endlich folgt aus (10), (11) und (12):

$$\left|\frac{dx}{dt}\right| = |x + f(x, y)| \leqq a e^{-nt(1+\delta)} + na\delta e^{-nt(1+\delta)},$$

$$\left|\frac{dy}{dt}\right| \geqq ny - |mx + \varphi(x, y)| \geqq \frac{nb}{2} e^{-nt}[1 - (1+\delta)e^{-nt\delta}].$$

Daher für genügend große $t$

$$|\Omega'(y)| = \left|\frac{dx}{dy}\right| = \frac{\left|\frac{dx}{dt}\right|}{\left|\frac{dy}{dt}\right|} < K e^{-nt\delta},$$

wo $K$ eine Konstante. Mit Rücksicht auf (12) folgt hieraus noch:

$$\lim_{y=0} \frac{\Omega'(y)}{y^\sigma} = 0 \quad \text{für} \quad \sigma < \delta, \tag{20}$$

woraus sich wegen (19) die Stetigkeit von $\Omega'(y)$ auch an der Stelle $y = 0$ ergibt.

Damit ist Satz 6 bewiesen, soweit er sich auf positive $y$ bezieht. Man findet aber, indem man statt der Gleichungen (3) die folgenden zugrunde legt:

$$x_{\nu+1} = e^{-t} \int_1^\infty f(x_\nu, y_\nu) e^t dt,$$

$$y_{\nu+1} = e^{-nt} \left\{ -\frac{b}{2} + \int_1^\infty [m x_\nu + \varphi(x_\nu, y_\nu)] e^{nt} dt \right\},$$

durch genau die gleichen Schlüsse, wobei nur $y$ jetzt negativ, und $\frac{dy}{dt}$ positiv ausfällt, daß auch für negative $y$ ein Integral $x = \Omega(y)$ existiert mit den entsprechenden Eigenschaften. Der Beweis von Satz 6 ist damit vollendet.

## § 7.

**Die Integralkurve des § 6 wird als krummlinige $Y$-Achse eingeführt.**

Wir wollen die Differentialgleichung (F) jetzt weiter behandeln und dabei über $f(x, y)$ und $\varphi(x, y)$ die in dem Fundamentalsatz Seite 123 formulierten Voraussetzungen machen. Dann gilt für $f(x, y)$ in hinreichender Nähe des Nullpunktes der Mittelwertsatz

$$f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2) = (x_1 - x_2) f'_x(\xi, \eta) + (y_1 - y_2) f'_y(\xi, \eta),$$
$$\xi = \vartheta x_1 + (1 - \vartheta) x_2, \quad \eta = \vartheta y_1 + (1 - \vartheta) y_2, \quad 0 < \vartheta < 1,$$

nd entsprechend für $\varphi(x, y)$. Aus den Voraussetzungen über die parti-
len Ableitungen schließt man aber weiter, daß in einer gewissen Um-
ebung des Nullpunktes alle Bedingungen von Satz 6 erfüllt sind. Nach
iesem Satz gibt es also ein Integral $x = \Omega(y)$, für welches

$$\lim_{y=0} \frac{\Omega(y)}{|y|^{1+\sigma}} = 0, \qquad \lim_{y=0} \frac{\Omega'(y)}{|y|^{\sigma}} = 0 \qquad \text{für} \quad \sigma < \delta$$

t. Setzt man $x = \Omega(y)$ in die Differentialgleichung (F) ein, so sieht
an weiter, daß für die Funktion $\Omega(y)$ die folgende Identität besteht:

$$\Omega(y) + f(\Omega(y), y) = [m\,\Omega(y) + n y + \varphi(\Omega(y), y)]\,\Omega'(y).$$

Nach dem, was wir in § 1 bewiesen haben, geht durch jeden Punkt
i einer gewissen Umgebung des Nullpunktes eine und nur eine Integral-
urve, und nach Satz 1 münden sie alle in den Nullpunkt ein. Eine
on ihnen hat die Gleichung $x = \Omega(y)$ und berührt daher im Nullpunkt
ie $Y$-Achse. Ob auch die andern im Nullpunkt eine bestimmte Tangente
aben, wissen wir zunächst nicht. Um diese Frage zu prüfen, führen
ir neue Variabeln ein, indem wir setzen:

$$x = \xi + \Omega(\eta), \qquad y = \eta,$$

der nach $\xi, \eta$ aufgelöst:

$$\xi = x - \Omega(y), \qquad \eta = y.$$

ie Differentialgleichung (F) geht dadurch über in:

$$[\xi + \Omega(\eta) + f(\xi + \Omega(\eta), \eta)]\,d\eta$$
$$= [m\,\xi + m\,\Omega(\eta) + n\,\eta + \varphi(\xi + \Omega(\eta), \eta)]\,[d\xi + \Omega'(\eta)\,d\eta].$$

Setzt man nun

$$P(\xi, \eta) = \begin{cases} \dfrac{f(\xi + \Omega(\eta), \eta) - f(\Omega(\eta), \eta)}{\xi} & \text{für} \quad \xi \neq 0, \\ f'_x(\Omega(\eta), \eta) & \text{für} \quad \xi = 0, \end{cases}$$

nd ebenso

$$Q(\xi, \eta) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(\xi + \Omega(\eta), \eta) - \varphi(\Omega(\eta), \eta)}{\xi} & \text{für} \quad \xi \neq 0, \\ \varphi'_x(\Omega(\eta), \eta) & \text{für} \quad \xi = 0, \end{cases}$$

ist nach dem Mittelwertsatz

$$P(\xi, \eta) = f'_x(\vartheta\xi + \Omega(\eta), \eta) \qquad (0 < \vartheta < 1),$$

o übrigens $\vartheta$ noch von $\xi$ und $\eta$ abhängt, und eine analoge Darstellung
lt für $Q(\xi, \eta)$. Daraus erkennt man $P(\xi, \eta)$ und $Q(\xi, \eta)$ in einer ge-
issen Umgebung des Nullpunktes als stetige Funktionen von $\xi, \eta$, und
is unseren Voraussetzungen sowie aus der ersten Gleichung (1) folgt leicht:

$$\lim_{\substack{\xi=0 \\ \eta=0}} \frac{P(\xi, \eta)}{(|\xi| + |\eta|)^{\delta}} = 0, \qquad \lim_{\substack{\xi=0 \\ \eta=0}} \frac{Q(\xi, \eta)}{(|\xi| + |\eta|)^{\delta}} = 0.$$

Der Differentialgleichung aber läßt sich die Form geben:

$$[\xi + \Omega(\eta) + f(\Omega(\eta), \eta) + \xi P(\xi, \eta)]\, d\eta$$
$$= [m\xi + m\Omega(\eta) + n\eta + \varphi(\Omega(\eta), \eta) + \xi Q(\xi, \eta)]\, [d\xi + \Omega'(\eta)\, d\eta],$$

und diese vereinfacht sich wegen der Identität (2) zu:

$$\xi[1 + P(\xi, \eta) - m\Omega'(\eta) - Q(\xi, \eta)\Omega'(\eta)]\, d\eta$$
$$= [m\xi + n\eta + m\Omega(\eta) + \varphi(\Omega(\eta), \eta) + \xi Q(\xi, \eta)]\, d\xi,$$

oder kürzer:

$$\xi[1 + R(\xi, \eta)]\, d\eta = [m\xi + n\eta + S(\xi, \eta)]\, d\xi, \tag{6}$$

wobei wegen (5) und den beiden Gleichungen (1) auch

$$\lim_{\substack{\xi=0 \\ \eta=0}} \frac{R(\xi, \eta)}{(|\xi| + |\eta|)^{\sigma}} = 0, \qquad \lim_{\substack{\xi=0 \\ \eta=0}} \frac{S(\xi, \eta)}{(|\xi| + |\eta|)^{1+\sigma}} = 0 \quad \text{für} \quad \sigma < \delta. \tag{7}$$

Die hier eingeführten Funktionen $R(\xi, \eta)$, $S(\xi, \eta)$ sind in einer gewissen Umgebung des Nullpunktes stetig. Dasselbe gilt, wenn

$$\frac{m\xi + n\eta + S(\xi, \eta)}{1 + R(\xi, \eta)} = m\xi + n\eta + \Phi(\xi, \eta)$$

gesetzt wird, auch von $\Phi(\xi, \eta)$, und wegen (7) ist

$$\lim_{\substack{\xi=0 \\ \eta=0}} \frac{\Phi(\xi, \eta)}{(|\xi| + |\eta|)^{1+\sigma}} = 0 \quad \text{für} \quad \sigma < \delta. \tag{8}$$

Die Differentialgleichung aber nimmt die einfache Form an:

$$\xi\, d\eta = [m\xi + n\eta + \Phi(\xi, \eta)]\, d\xi. \tag{9}$$

Sie hat jedenfalls die Integralkurve $\xi = 0$, welcher nach (4) die im Nullpunkt die $Y$-Achse berührende Kurve $x = \Omega(y)$ entspricht. Für die übrigen Integralkurven unterscheiden wir drei Fälle.

*Erster Fall*: $m = 0$, $n > 1$. Dann ist für jedes andere Integral nach Satz 3

$$\lim_{\xi=0} \frac{\eta}{\xi} = 0,$$

also auch

$$\lim_{x=0} \frac{y}{x} = \lim_{\xi=0} \frac{\eta}{\xi + \Omega(\eta)} = \lim_{\xi=0} \frac{\frac{\eta}{\xi}}{1 + \frac{\Omega(\eta)}{\eta} \cdot \frac{\eta}{\xi}} = 0;$$

das besagt aber, daß jede von der Integralkurve $x = \Omega(y)$ verschiedene Integralkurve im Nullpunkt die $X$-Achse berührt. Damit ist für die spezielle Differentialgleichung

$$[x + f(x, y)]\, dy = [n y + \varphi(x, y)]\, dx \qquad (n > 1) \tag{Ia}$$

der Fundamentalsatz bewiesen.

*Zweiter Fall*: $m = 0$, $n = 1$. Dann gibt es nach Satz 4 sowohl ir positive als für negative $\xi$ eine Integralkurve, für welche

$$\lim_{\xi=0} \frac{\eta}{\xi}$$

inen vorgegebenen endlichen Wert $c$ hat; also ist auch

$$\lim_{x=0} \frac{y}{x} = \lim_{\xi=0} \frac{\eta}{\xi + \Omega(\eta)} = \lim_{\xi=0} \frac{\frac{\eta}{\xi}}{1 + \frac{\Omega(\eta)}{\eta} \cdot \frac{\eta}{\xi}} = c,$$

nd zwar hat $x$ das gleiche Vorzeichen wie $\xi$. Damit wird der Fundamentalsatz für die spezielle Differentialgleichung

IIa) $$[x + f(x, y)]\,dy = [y + \varphi(x, y)]\,dx$$

ewiesen sein, sobald wir noch zeigen können, daß in jeder Richtung *ur eine* Integralkurve durch den Nullpunkt geht. Nun geht aber die Differentialgleichung (IIa) durch die Substitution $y = xz$ über in:

$$x[x + f(x, xz)]\,dz = [\varphi(x, xz) - z f(x, xz)]\,dx,$$

der wenn man zwei Funktionen $\psi(x, z)$, $\omega(x, z)$ durch die Gleichungen

$$\psi(x, z) = \begin{cases} |x|^{-1-\delta} f(x, xz) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

$$\omega(x, z) = \begin{cases} |x|^{-1-\delta} \varphi(x, xz) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \cdot \end{cases}$$

efiniert, in:

10) $$[1 + \operatorname{sign}(x) \cdot |x|^{\delta} \cdot \psi(x, z)]\,dz = [\omega(x, z) - z\,\psi(x, z)]\,|x|^{\delta-1}\,dx.$$

Auf Grund der Voraussetzungen des Fundamentalsatzes erkennt man ber, daß die Funktionen $\psi(x, z)$, $\omega(x, z)$ in einem gewissen Bereich

$$\cdot |x| < a, \quad |z - c| < b$$

tetige partielle Ableitungen nach $z$ haben (insbesondere auch stetig für $= 0$). Daher ist für die Differentialgleichung (10), wenn man noch $x|^{\delta} = v$ setzt und $z$ als Funktion von $v$ sucht, die Lipschitz-Bedingung rfüllt, und folglich gibt es *nur ein* Integral, welches für $v = 0$, d. h. $x = 0$ en Wert $z = c$ annimmt. Jeder vom Nullpunkt ausgehende Halbstrahl, er nicht in die $Y$-Achse fällt (d. h. $c$ = endlich), wird also *nur von einer* ntegralkurve der Differentialgleichung (IIa) berührt. Das gleiche gilt ber auch von der positiven und negativen $Y$-Achse, wie man erkennt, enn man in (IIa) $x$ und $y$ ihre Rollen tauschen läßt.

*Dritter Fall*: $m \neq 0$, $n = 1$. Dann ist nach Satz 5

$$\lim_{\xi=0} \frac{\eta}{m\,\xi} = -\infty;$$

also

$$\lim_{y=0} \frac{y}{m\,(x-\Omega(y))} = -\infty.$$

Hieraus folgt im Verein mit der ersten Gleichung (1):

$$\lim_{y=0} \frac{x}{y} = 0,$$

so daß die Integralkurven die $Y$-Achse berühren. Und zwar hat

$$m\,(\Omega(y) - x)$$

in hinreichender Nähe des Nullpunkts stets das gleiche Vorzeichen wie $y$. Die Integralkurven liegen also für positive $y$ sämtlich auf der einen, für negative $y$ auf der andern Seite der Kurve $x = \Omega(y)$. Damit ist der Fundamentalsatz auch bewiesen für die Differentialgleichung

$$(\text{IIIa}) \qquad [x + f(x, y)]\,dy = [m\,x + y + \varphi(x, y)]\,dx \qquad (m \neq 0).$$

## § 8.

### Zurückführung des allgemeinen Falles auf die behandelten Spezialfälle mit Hilfe einer affinen Transformation.

Wir wollen jetzt die allgemeine Differentialgleichung (A) durch eine reelle affine Transformation

$$(1) \qquad \begin{cases} x = \alpha_1 X + \beta_1 Y, \\ y = \alpha_2 X + \beta_2 Y, \end{cases} \qquad \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \neq 0$$

in die im vorigen Paragraphen behandelten Differentialgleichungen überzuführen versuchen. Dabei wird es gelingen, die in dem Fundamentalsatz unterschiedenen drei Fälle (I), (II), (III) der Reihe nach gerade auf die Differentialgleichungen (Ia), (IIa), (IIIa) zurückzuführen[9]), womit der Fundamentalsatz vollständig bewiesen sein wird.

Durch die Transformation (1) geht die Differentialgleichung (A) über in die folgende:

$$(2) \qquad [\varkappa X + \lambda Y + F(X, Y)]\,dY = [\mu X + \nu Y + \Phi(X, Y)]\,dX.$$

---

[9]) Diese Transformation ist von allen Autoren bereits benutzt worden und wird hier nur der Vollständigkeit halber nochmals durchgeführt.

bei ist

$$\begin{cases} \varkappa = (k\alpha_1 + l\alpha_2)\beta_2 - (m\alpha_1 + n\alpha_2)\beta_1, \\ \lambda = (k\beta_1 + l\beta_2)\beta_2 - (m\beta_1 + n\beta_2)\beta_1, \\ \mu = -(k\alpha_1 + l\alpha_2)\alpha_2 + (m\alpha_1 + n\alpha_2)\alpha_1, \\ \nu = -(k\beta_1 + l\beta_2)\alpha_2 + (m\beta_1 + n\beta_2)\alpha_1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} F(X,Y) = \beta_2 f(\alpha_1 X + \beta_1 Y, \alpha_2 X + \beta_2 Y) - \beta_1 \varphi(\alpha_1 X + \beta_1 Y, \alpha_2 X + \beta_2 Y), \\ \Phi(X,Y) = -\alpha_2 f(\alpha_1 X + \beta_1 Y, \alpha_2 X + \beta_2 Y) + \alpha_1 \varphi(\alpha_1 X + \beta_1 Y, \alpha_2 X + \beta_2 Y). \end{cases}$$

Die in dem Fundamentalsatz über $f(x,y)$, $\varphi(x,y)$ gemachten Vorssetzungen übertragen sich daher unmittelbar auf $F(X,Y)$ $\Phi(X,Y)$.

Nun müssen wir die drei Fälle des Fundamentalsatzes trennen.

*Erster Fall*:

$$(k-n)^2 + 4lm > 0, \qquad kn - lm > 0.$$

er hat die quadratische Gleichung

$$\begin{vmatrix} k-\varrho & l \\ m & n-\varrho \end{vmatrix} = 0$$

ei verschiedene reelle Wurzeln von gleichem Vorzeichen. Wir bezeichn die absolut kleinere mit $\varrho$, die absolut größere mit $\sigma$; also ist

$$|\sigma| > |\varrho| > 0, \qquad \frac{\sigma}{\varrho} > 1.$$

Nun wählen wir die Transformationskoeffizienten $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ so, daß

$$\varrho\alpha_1 = k\alpha_1 + l\alpha_2, \qquad \sigma\beta_1 = k\beta_1 + l\beta_2,$$
$$\varrho\alpha_2 = m\alpha_1 + n\alpha_2, \qquad \sigma\beta_2 = m\beta_1 + n\beta_2$$

. Das ist möglich, weil ja $\varrho, \sigma$ die Wurzeln der obigen quadratischen eichung sind. Hierdurch werden $\alpha_1, \alpha_2$ bis auf einen willkürlichen oportionalitätsfaktor eindeutig bestimmt; ebenso $\beta_1, \beta_2$. Man sieht ch sofort, daß $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$, daß die getroffene Wahl also zulässig . Die Proportionalitätsfaktoren wollen wir so wählen, daß

$$\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = \frac{1}{\varrho}$$

Dann ergeben sich für $\varkappa, \lambda, \mu, \nu$ aus (3) die Werte:

$$\varkappa = \varrho\alpha_1\beta_2 - \varrho\alpha_2\beta_1 = 1,$$
$$\lambda = \sigma\beta_1\beta_2 - \sigma\beta_2\beta_1 = 0,$$
$$\mu = -\varrho\alpha_1\alpha_2 + \varrho\alpha_2\alpha_1 = 0,$$
$$\nu = -\sigma\beta_1\alpha_2 + \sigma\beta_2\alpha_1 = \frac{\sigma}{\varrho} > 1.$$

Differentialgleichung (2) ist daher die folgende:

$$[X + F(X,Y)]\,dY = [\nu Y + \Phi(X,Y)]\,dX \qquad (\nu > 1);$$

sie hat also die Form der Differentialgleichung (Ia) des vorigen Para graphen.

*Zweiter Fall*:

$$(k-n)^2+4lm=0, \quad kn-lm\neq 0, \quad |l|+|m|=0.$$

Hier ist $l=m=0$, $k=n\neq 0$. Die Differentialgleichung (A) nimm also, wenn man sie durch $k$ dividiert, bereits die Form (IIa) des vorige Paragraphen an; eine affine Transformation ist nicht mehr nötig.

*Dritter Fall*:

$$(k-n)^2+4lm=0, \quad kn-lm\neq 0, \quad |l|+|m|>0.$$

Wenn jetzt $l=0$, so ist $k=n\neq 0$, $m\neq 0$. Die Differentialgleichung (A geht daher schon, indem man sie durch $k$ dividiert, in die Form (IIIa über, und es ist keine affine Transformation mehr nötig. Daher sei jetz

$$l\neq 0.$$

Dann folgt aus

$$(k+n)^2-4(kn-lm)=(k-n)^2+4lm=0,$$

weil $kn-lm\neq 0$ ist, gewiß auch

$$k+n\neq 0.$$

Für die Transformationskoeffizienten wählen wir nun die Werte

$$\alpha_1=0, \quad \beta_1=\frac{-2}{k+n},$$

$$\alpha_2=1, \quad \beta_2=\frac{\varkappa-n}{l(k+n)}.$$

Dann ist $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\neq 0$, die Wahl also zulässig. Für $\varkappa, \lambda, \mu, \nu$ finde man aber aus (3) sogleich die Werte:

$$\varkappa=1, \quad \lambda=0, \quad \mu=-l\neq 0, \quad \nu=1,$$

so daß die transformierte Differentialgleichung (2) die Form (IIIa) de vorigen Paragraphen hat.

(Eingegangen am 21. 12. 1921.)

# ber die Flächen, welche ein Strahlenbündel isogonal schneiden.

Von

Richard Baldus in Karlsruhe.

Über die Flächen, welche die Strahlen eines Bündels unter festem inkel schneiden, ist noch verhältnismäßig wenig veröffentlicht worden. erst gab G. Scheffers[1]) eine allgemeine Erzeugungsweise für sie an d bestimmte ihre Krümmungslinien; G. Landsberg[2]) kam unabhängig von später zu den gleichen Ergebnissen, fügte noch eine zweite Erugungsweise hinzu und berechnete die beiden quadratischen Fundamentalmen sowie die Ausdrücke für das Krümmungsmaß und die Hauptümmungsradien. In neuerer Zeit wurden diese Isogonalflächen in der ysikalischen Optik erwähnt[3]).

Bei näherer Betrachtung entdeckt man an ihnen, zum Teil in weithender Analogie zu bekannten Sätzen über logarithmische Spiralen, eine ihe einfacher geometrischer Eigenschaften. Besonders interessante und gewissem Sinn einfachste Vertreter der Isogonalflächen treten dabei ter den imaginären Flächen auf, was dazu führen wird die folgenden trachtungen, trotz der Erschwerung durch die metrisch singuläre Stelg des absoluten Kegelschnittes und der damit zusammenhängenden tropen Gebilde, komplex zu halten. Wegen der in mancher Hinsicht mplizierten Natur der Isogonalflächen wird dabei auf einige Beispiele cher Flächen etwas näher einzugehen sein. Die Beweise der vor-

[1]) G. Scheffers, Über Loxodromen, Leipziger Berichte, Mathematisch-physikahe Klasse 54 (1902), S. 363–370; zum Teil wiederholt in: Über die Isogonalflächen es Strahlenbündels, Mathematische Annalen 66 (1909), S. 575.

[2]) G. Landsberg, Über die Klasse der Flächen, welche ein Strahlenbündel er festem Winkel schneiden, Mathematische Annalen 66 (1909), S. 195–201.

[3]) F. Jentzsch-Gräfe, Der Polarisationsspiegel und die allgemeine Polarisasfläche, Verhandlungen der deutschen physikalischen Gesellschaft 20 (1918), 13–16, S. 103–109.

getragenen Sätze und eine Anzahl weiterer Sätze, die hier der Kürz halber unterdrückt werden, wird der Verfasser an anderer Stelle[4]) ve öffentlichen. Die auftretenden Funktionen sollen als eindeutige, analy tische Funktionen vorausgesetzt werden.

1. Definition der Flächen. $\alpha$ sei ein Winkel, dessen Tange einen bestimmten, endlichen, von 0 und $\pm i$ verschiedenen Wert ha Eine Fläche, welche die Strahlen eines Bündels mit dem Mittelpunkt $O$ von denen sie getroffen wird, unter einem festen Winkel $\alpha$ schneide heiße eine Isogonalfläche des Bündels, $O$ ihr Pol[5]). Dann folgt aus de Festsetzungen über $\alpha$, neben dem Ausschlusse der trivialen Fälle de Ebene durch $O$ und der Kugel um $O$:

a) $O$ liegt nicht auf dem absoluten Kegelschnitte.

b) Die Isogonalfläche ist keine abwickelbare isotrope Regelfläche.

c) Sie hat keinen uneigentlichen Punkt.

d) Ihre sämtlichen Tangentialebenen sind anisotrop.

Ist $O$ ein eigentlicher Punkt, dann möge die Isogonalfläche mit $[P]$ be zeichnet werden. Für $[P]$ gilt außerdem noch

e) $[P]$ trifft den isotropen Kegel aus $O$ nicht.

2. Der Fall des uneigentlichen Poles. Ist $O$ ein uneigentliche Punkt, dann ist die Isogonalfläche eine zylindrische Gesimsfläche und zwa speziell eine Böschungsfläche. $O$ ist der uneigentliche Punkt des all gemeinen — nach Nr. 1a anisotropen — Zylinders, auf dem die Schrauben linie liegt, deren Tangenten die Fläche bilden. Legt man die $Z$-Achs eines rechtwinkligen räumlichen Koordinatensystems[6]) durch $O$, dann lauter hier die Flächengleichungen unter Verwendung einer willkürlichen Funk tion $f(u)$

$$x = u + v, \quad y = f(u) + v \cdot f'(u), \quad z = a \int_{u_0}^{u} \sqrt{1 + f'(u)^2}\, du + va\sqrt{1 + f'(u)^2}$$

Dabei ist hier und im folgenden immer $a = \operatorname{cotg} \alpha$. Die Kurve $v =$ ist die zylindrische Schraubenlinie, $u =$ const. sind deren Tangenten. Zu Fläche gehören nur die Punkte $x, y, z$, die den Bedingungen Nr. 1 und d genügen.

---

[4]) Ist inzwischen erschienen: R. Baldus, Über die Flächen, welche die Strahle eines Bündels unter festem Winkel schneiden, Heidelberger Berichte, Mathem. naturw Kl. Abt. A, Jahrgg. 1921, 10. Abhdlg. S. 1—78.

[5]) Diese Bezeichnung ist dem Falle der logarithmischen Spirale nachgebildet bei der man, nebenbei bemerkt, im Komplexen nicht mehr von einem asymptotische Punkte sprechen kann. Vgl. dazu R. Baldus, Über logarithmische Spiralen, di gleichzeitig algebraische Kurven sind, Archiv der Mathematik und Physik 28 (1920) S. 102—111, im folgenden zitiert als L. S.

[6]) Es werden im folgenden immer rechtwinklige Koordinatensysteme benütz (mit anisotropen Koordinaten-Achsen und folglich auch -Ebenen).

3. Die Krümmungslinien der Flächen $[P]$. Weiterhin soll nur ehr von den Flächen $[P]$ die Rede sein; dabei wird der Pol $O$ immer s Koordinatenanfangspunkt gewählt. Ist eine Fläche $[P]$ in der Form $x, y, z) = 0$ gegeben, dann genügt sie der Differentialgleichung

$$\frac{\Sigma x \cdot f_x}{\sqrt{\Sigma x^2 \cdot \Sigma f_x^2}} = \sin \alpha .$$

Für die Folge möge bezeichnen:

$(C_a)$ eine überall anisotrope Kurve ohne singulären[7]) oder uneigentlichen Punkt,

$[F_a]$ eine Fläche mit lauter anisotropen Tangentialebenen, die keinen eigentlichen Punkt enthält und den isotropen Kegel aus dem Koordiatenanfangspunkte nicht trifft. Nach Nr. 1c, d, e gehören die Flächen P] zu den Flächen $[F_a]$.

Dann findet man:

a) Die Krümmungslinien von $[P]$ sind Kurven $(C_a)$ und zwar die es einen Systems konzentrisch sphärisch auf Kugeln um $O$, die des nderen Systems logarithmische Spiralen.

Die logarithmischen Spiralen, die als nicht-zerfallende Kurven defiert sein mögen (vgl. L. S. Gleichung 12) gehören nicht ganz zur Fläche P], da nach Nr. 1c die uneigentlichen Punkte ausgeschlossen sind. Weitere Ausnahmepunkte folgen am Schlusse von Nr. 7. Der Kürze alber werden im folgenden diese Teilkurven als logarithmische Spiralen ezeichnet werden. Durch eine Fläche $[P]$ ist der zugehörige Pol eineutig bestimmt.

b) Die Spiralenebenen sind anisotrop.

c) Die Flächen $[P]$ und nur diese erfüllen neben den Ungleichungen

$$\Sigma x_u^2 \neq 0, \quad \Sigma x_v^2 \neq 0, \quad \Sigma x^2 \neq 0$$

ie Gleichungen

1) $$\Sigma x_u x_v = 0, \quad \Sigma x x_u = 0, \quad \Sigma x x_v = \cos\alpha \cdot \sqrt{\Sigma x^2}, \quad \Sigma x_v^2 = 1 .$$

abei sind $u = \text{const.}$ die logarithmischen Krümmungslinien (mit dem ogenelemente $dv$), $v = \text{const.}$ die sphärischen Krümmungslinien.

Nr. 3a gestattet mehrere Umkehrungssätze, von denen nur zwei erähnt werden mögen. Aus dem Hilfssatze

d) Wird eine Fläche $[F_a]$ von einem System um $O$ konzentrischer ugeln in einer Schar von Kurven geschnitten, deren Orthogonaltrajekorien in Ebenen durch $O$ liegen, und bestehen beide Scharen aus Kurven $(C_a)$, dann sind diese Kurven die Krümmungslinien der Fläche, folgt

[7]) D. h. ist $t$ der Kurvenparameter, dann ist nirgends $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0$.

c) Enthält eine Fläche $[F_a]$ auf konzentrischen Kugeln um $O$ ein Schar von Kurven, deren Orthogonaltrajektorien in Ebenen durch $O$ liegen und bestehen beide Scharen aus Kurven $(C_a)$, dann ist die Fläche ein Fläche $[P]$ mit dem Pol $O$, wenn eine der Orthogonaltrajektorien, di alle sphärischen Kurven trifft, eine logarithmische Spirale mit dem Pol ist. Ein Gegenstück hierzu bildet der Satz

f) Eine Fläche $[F_a]$ ist als Fläche $[P]$ dadurch charakterisiert, da die Krümmungslinien des einen Systems kongruente logarithmische Spirale mit dem gemeinsamen Pol $O$ sind, während eine sie alle treffende Krümmungslinie der anderen Schar auf einer Kugel um $O$ liegt.

Das Längenelement von $[P]$ hat nach den Gleichungen (1) die Form

$$ds^2 = (\Sigma x_u^2)\,du^2 + dv^2.$$

Daraus folgt

g) Die sphärischen Krümmungslinien von $[P]$ sind geodätisch parallel

Mittels des Hilfssatzes „liegt auf einer Fläche $[F_a]$ eine Schar von geodätisch parallelen, auf Kugeln um $O$ konzentrisch sphärischen Kurven $(C_a)$, dann sind diese Krümmungslinien der Fläche“ kommt man zu dem Ergebnisse

h) Enthält eine Fläche $[F_a]$ ein System geodätisch paralleler, auf Kugeln um $O$ konzentrisch sphärischer Kurven $(C_a)$ und ist eine, alle diese Kurven treffende, Orthogonaltrajektorie dieses Systems eine ebene logarithmische Spirale mit dem Pol $O$, dann ist $[F_a]$ eine Fläche $[P]$.

4. Isogonaltrajektorien der Krümmungslinien. Man erkennt unschwer

a) Die anisotropen Isogonaltrajektorien der Krümmungslinien von $[P]$ sind konische Schraubenlinien auf allgemeinen Kegeln mit der Spitze $O$.

Bezeichnet $S_a$ ein System konischer Schraubenlinien $(C_a)$, die auf Kegeln mit der Spitze $O$ liegen, unter sich gleichen, von 0 und $\frac{\pi}{2}$ verschiedenen Steigwinkel haben und eine Fläche einfach überdecken, dann gelten für solche Systeme auf $[P]$ Sätze, aus denen einer als Beispiel herausgegriffen sei:

b) Bestimmt man auf einer Fläche $[P]$ zwei solche Systeme $S_a$, dann durchsetzen diese einander isogonal.

5. Gemeinsame Erzeugung und Bestimmungsstücke der Flächen $[P]$. Aus Nr. 3a folgt, daß die Flächen $[P]$ zu den allgemeinen Gesimsflächen gehören, nach dem Satz

a) Jede Fläche $[P]$ mit dem Pol $O$ läßt sich durch (komplexe) Bewegung einer logarithmischen Spirale mit dem Pol $O$ dadurch erzeugen, daß die Spiralebene auf einem Kegel $[K]$ mit der Spitze $O$ ohne zu gleiten rollt.

. b) $[K]$ besitzt lauter anisotrope Tangentialebenen. Spätere Betrachtungen machen außerdem die Voraussetzungen nötig, daß $[K]$ keine isotrope Erzeugende und keine singuläre Tangentialebene[8]) enthält.

c) Umgekehrt erzeugt jede in dieser Weise rollende anisotrope logarithmische Spirale eine Fläche $[P]$, soweit die Bahnkurven der Spiralenpunkte Kurven $(C_a)$ sind. Man kann daher einer Fläche $[P]$ den Pol $O$, den Schnittwinkel $\alpha$ und auf einer anisotropen Kugel um $O$ irgendeine Kurve $(C_a)$ vorschreiben.

d) In etwas anderer Weise bestimmt man eine Fläche $[P]$ durch einen Kegel $[K]$, vorausgesetzt, daß die Orthogonaltrajektorien von dessen Tangentialebenen Kurven $(C_a)$ sind, außerdem durch einen Flächenpunkt in einer Tangentialebene des Kegels, der auf keiner isotropen Geraden durch $O$ liegt, und durch den Schnittwinkel $\alpha$. In beiden Fällen ist die Bestimmung nicht eindeutig.

e) Mittels des Hilfssatzes Nr. 3d läßt sich zeigen, daß man einer Fläche $[P]$ außer dem Pol $O$ und dem Schnittwinkel $\alpha$ noch eine beliebige Kurve $(C_a)$ vorschreiben kann, die keinen Punkt mit dem isotropen Kegel aus $O$ gemeinsam hat. Daraus folgt

f) Enthält eine Fläche $[F_a]$ ein System anisotroper logarithmischer Spiralen mit gemeinsamem Pol $O$ und gleichem Schnittwinkel $\alpha$ und werden längs irgendeiner, alle Spiralen treffenden Kurve $(C_a)$ der Fläche die Radienvektoren aus $O$ von der Fläche unter dem konstanten Winkel $\alpha$ geschnitten, dann liegt eine Fläche $[P]$ vor.

6. Drehflächen $[P]$. Aus Nr. 5c folgt, daß die einzige Rotationsfläche $[P]$ die Drehfläche der logarithmischen Spirale um eine anisotrope oder isotrope, den Pol der Spirale enthaltende Gerade ist. Legt man bei anisotroper Drehachse diese in die $Z$-Achse, dann lautet die Gleichung der Fläche bei entsprechender Wahl des Einheitspunktes — über den auch bei den folgenden Flächengleichungen immer zweckentsprechend verfügt werden wird

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} - e^{\alpha \cdot \operatorname{arctg} \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}} = 0. \tag{2}$$

Ist die Drehachse isotrop und wählt man sie als Gerade $x+iy=0$, $=0$, dann erhält man die Flächengleichung

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} - e^{\alpha \cdot \operatorname{arctg} \frac{2xy+2iy^2+iz^2}{2x^2+2ixy+z^2}} = 0. \tag{3}$$

Diese Fläche enthält als sphärische Krümmungslinien parabolische Kreise in Parallelebenen zur Ebene $x+iy=0$.

[8]) D. h. ist $\varphi(t)\cdot x+\chi(t)\cdot y+\psi(t)\cdot z=0$ die Tangentialebenenschar in Parameterform, dann soll für keinen Wert $t$ gleichzeitig $\varphi'=\chi'=\psi'=0$ sein.

7. Parameterdarstellung der allgemeinen Flächen $[P]$. De Kegel $[K]$ artet nur bei den Drehflächen in ein Ebenenbüschel aus. Sieh man von diesem Fall ab, dann lassen sich alle übrigen Flächen $[P]$ mi einem die Bedingungen von Nr. 5b erfüllenden Kegel $[K]$ in folgende Weise in Parameterform darstellen, wobei $u, v$ die gleichen Parameter wie in Nr. 3c sind:

Es sei $K\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$ die Gleichung des Kegels und $u_1 - f(u) = 0$ deren Auflösung für $\frac{x}{z} = u$, $\frac{y}{z} = u_1$. Außerdem möge abkürzend gesetzt werden

$$a_1(u) = -f'(u), \qquad b_1(u) = -f(u) + u \cdot f'(u)$$
$$m(u) = \sqrt{1 + a_1(u)^2 + b_1(u)^2}, \qquad n(u) = \sqrt{1 + u^2 + f(u)^2};$$

dann ist $[P]$ in der Parameterdarstellung

$$(4) \quad \begin{cases} x(u,v) = (v\cos\alpha + 1)(\cos\varphi(u,v)\cdot\cos\lambda(u) + \sin\varphi(u,v)\cdot\cos\xi(u)) \\ y = (v\cos\alpha + 1)(\cos\varphi\cdot\cos\mu + \sin\varphi\cdot\cos\eta) \\ z = (v\cos\alpha + 1)(\cos\varphi\cdot\cos\nu + \sin\varphi\cdot\cos\zeta) \end{cases}$$

gegeben. Dabei gelten die Gleichungen

$$\cos\lambda(u) = \frac{u}{n(u)}, \qquad \cos\mu = \frac{f}{n}, \qquad \cos\nu = \frac{1}{n},$$
$$\cos\xi(u) = \frac{1}{m(u)\cdot n(u)}[1 - b_1(u)\cdot f(u)], \qquad \cos\eta = \frac{1}{m\cdot n}[u b_1 - a_1],$$
$$\cos\zeta = \frac{1}{m\cdot n}[a_1\cdot f - n],$$

$$\varphi(u,v) = \vartheta(u) - \operatorname{tg}\alpha\cdot\ln(v\cos\alpha + 1), \qquad \vartheta(u) = \int_{u_0}^{u} \frac{m(u)}{n(u)^2}\,du.$$

In den Gleichungen (4) ist $u$ innerhalb des (Nr. 5b genügenden) Definitionsbereiches von $f(u)$ unbeschränkt variabel. $v$ darf nur endliche, von $-\frac{1}{\cos\alpha}$ und von $v = \frac{1}{\cos\alpha}[(-1)^n \cdot e^{-\alpha(\vartheta(u)+n\pi)} - 1]$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, verschiedene Werte annehmen, wobei $u$ der zu der Spirale, auf der $v$ gemessen wird, gehörende Wert ist. Damit sind von der Fläche $[P]$ die Schnittpunkte der Spiralen mit den zu $[K]$ gehörenden Berührungserzeugenden ihrer Ebenen ausgeschlossen. Diese Punkte bilden eine auf $[K]$ konische Schraubenlinie $(S)$, die nicht zu $[P]$ gehört, aber durch $[P]$ eindeutig bestimmt ist.

Wenn eine Fläche $[P]$ durch eine Gleichung $f(x, y, z) = 0$ gegeben ist, wie z. B. in den Gleichungen (2) und (3), dann liefern nur diejenigen Wertetripel $x, y, z$ dieser Gleichung Flächenpunkte, welche Nr. 1c, d, e sowie Nr. 5a erfüllen und nicht auf $(S)$ liegen. Trotzdem möge der Kürze

alber eine solche Gleichung einfach als Gleichung der betreffenden Fläche $P]$ bezeichnet werden.

8. Von einer Fläche $[P]$ abgeleitete Flächen $[P]$. In der bene hat die logarithmische Spirale die bekannte Eigenschaft, daß für e jede Drehung um den Pol durch eine Streckung vom Pol aus wieder ufgehoben werden kann. Hieraus folgt ein allgemeines Prinzip, nach em aus jedem geometrischen Prozeß in der Ebene, der eine anisotrope garithmische Spirale in eine anisotrope logarithmische Spirale mit dem- lben Pol überführt, ein räumlicher Prozeß abgeleitet werden kann, der de Fläche $[P]$ in eine Fläche $[P]$ mit dem nämlichen Kegel $[K]$ ver- andelt. Man erhält in dieser Weise eine Reihe von Sätzen, aus denen nige herausgegriffen seien:

a) Die Fußpunkte der Lote aus $O$ auf die Tangentialebenen von $[P]$ lden eine Fläche $[P]'$, die aus $[P]$ durch eine Streckung von $O$ aus it dem Faktor $\sin\alpha \cdot e^{\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\operatorname{cotg}\alpha}$ entsteht.

b) Werden die aus $O$ auf $[P]$ auftreffenden Strahlen an $[P]$ unter nem festen Winkel $\beta$ mit der Flächennormalen reflektiert, dann sind ese zurückgeworfenen Strahlen Tangenten einer neuen Fläche $[P]''$, die us $[P]$ durch eine Streckung von $O$ aus mit dem Faktor $\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha} \cdot e^{\left(\beta-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{cotg}\alpha}$ rvorgeht. Hieraus folgt speziell

c) Der eine Mantel der Zentrafläche von $[P]$ ist der Kegel $[K]$, der ndere Mantel ist eine Fläche $[P]_1$ mit demselben Schnittwinkel, Pol und egel $[K]$ wie $[P]$. $[P]_1$ entsteht aus $[P]$ durch eine Streckung von $O$ us mit dem Faktor $a \cdot e^{-\frac{\pi}{2}\cdot a}$. Die Tangenten der logarithmischen Krümmungs- nien von $[P]_1$ sind die Normalen von $[P]$. Die Fläche ist ihre eigene ntrafläche, $[P]_1$ fällt mit $[P]$ zusammen, wenn $\frac{\ln a}{a} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $= 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ ist.

9. Algebraische Flächen $[P]$. Die reellen Flächen $[P]$ sind anszendent, unter den imaginären treten auch algebraische auf. Der und hierfür ist die Tatsache, daß die logarithmischen Spiralen $r = c \cdot e^{a\varphi}$ r

) $$a = \frac{m}{n} \cdot i \qquad (m, n = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

gebraisch sind (vgl. L. S.). Hieraus folgt der Satz

a) Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine äche $[P]$ algebraisch ist, besteht darin, daß *eine* sphärische Krümmungs- ie algebraisch ist und der Schnittwinkel $\alpha$ der Gleichung (5) genügt. ide Scharen von Krümmungslinien einer solchen Fläche sind algebraisch.

Ist $x = \varphi_1(u)$, $y = \varphi_2(u)$, $z = \varphi_3(u)$ die Parameterdarstellung dieser einen Krümmungslinie durch algebraische Funktionen von $u$, dann lauten die Gleichungen der Fläche $[P]$ (wieder mit den Parametern von Nr. 3c)

$$x(u, v) = x_1(u, v) \cdot \alpha_1(u) + y_1(u, v) \cdot \beta_1(u),$$

$$y = x_1 \cdot \alpha_2 + y_1 \cdot \beta_2, \qquad z = y_1 \cdot \beta_3,$$

dabei ist

$$x_1(u, v) = \frac{v^{-\frac{p}{p+q}}}{2}[x_0(u) - iy_0(u) + (x_0(u) + iy_0(u))v],$$

$$y_1 = \frac{v^{-\frac{p}{p+q}}}{2}[x_0 - iy_0 - (x_0 + iy_0)v], \qquad a = \frac{p-q}{p+q} \cdot i,$$

$$x_0(u) = \varphi_1(u) \cdot \alpha_1(u) + \varphi_2(u) \cdot \alpha_2(u), \quad y_0 = \varphi_1 \cdot \beta_1 + \varphi_2 \cdot \beta_2 + \varphi_3 \cdot \beta_3,$$

$$\alpha_1(u) = \varphi_2'(u) \cdot A(u), \quad \alpha_2 = -\varphi_1' \cdot A, \quad A(u) = \frac{1}{\sqrt{\varphi_1'(u)^2 + \varphi_2'(u)^2}},$$

$$\beta_1(u) = \varphi_1'(u) \cdot \varphi_3'(u) \cdot A(u) \cdot B(u), \qquad \beta_2 = \varphi_2' \cdot \varphi_3' \cdot A \cdot B,$$

$$\beta_3 = -(\varphi_1'^2 + \varphi_2'^2) \cdot A \cdot B, \quad B(u) = \frac{1}{\sqrt{\varphi_1'(u)^2 + \varphi_2'(u)^2 + \varphi_3'(u)^2}}.$$

10. Einfachste Flächen $[P]$. Eine Fläche $[P]$ wird von einer Geraden durch $O$, die in einer Tangentialebene von $[K]$ liegt, dann in den wenigsten Punkten getroffen, wenn durch diese Gerade möglichst wenig weitere Tangentialebenen von $[K]$ hindurchgehen und in diesen Ebenen die Gerade die logarithmischen Krümmungslinien in möglichst wenig Punkten trifft. Dies tritt ein, wenn $[K]$ in ein Ebenenbüschel ausartet und die (anisotropen) logarithmischen Krümmungslinien algebraische Kurven möglichst niedriger Ordnung sind, d. h. Parabeln (L. S. Nr. 14). Man erhält als in diesem Sinn einfachste Flächen $[P]$ für $a = 3i$ die drei Spezialfälle der Drehflächen $[P]$

$$(1 + 6iz)(x^2 + y^2 + z^2) - 8iz^3 - (x^2 + y^2 + z^2)^2 = 0$$

$$(x + iy)^3 - (x^2 + y^2 + z^2)^2 = 0$$

und

$$x^3 + y^2 + z^2 - (x - iy)^3 = 0.$$

Die Drehachse dieser imaginären Flächen 4. und 3. Ordnung ist im ersten Falle anisotrop, in den beiden weiteren Fällen isotrop. Außer der Parabelschar enthält jede dieser Flächen noch eine Schar von Kreisen, die bei den zwei letzten Flächen parabolisch sind.

11. Kollineare Transformationen der Flächen $[P]$ in sich. Eine Fläche $[P]$ wird durch die Streckungen von $O$ aus mit dem Faktor

$-2n\pi a$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$, in sich übergeführt. Dies sind bei algebraischen ogarithmischen Krümmungslinien endlich viele verschiedene Streckungen, ei transzendenten logarithmischen Krümmungslinien abzählbar unendlich iele.

Im Anschluß an Nr. 1c, d, e und die Bemerkung über die Kurve $(S)$ Nr. 7 läßt sich zeigen:

a) Wird eine Fläche $[P]$, die nicht Drehfläche ist und für die $a$ nicht nen der Werte $\pm 3i, \pm 2i, \pm 5i$ hat, samt der durch sie bestimmten urve $(S)$ durch eine Kollineation in sich transformiert, dann ist $O$ ein estpunkt der Kollineation, außerdem wird der absolute Kegelschnitt und er Kegel $[K]$ in sich übergeführt.

b) Unter diesen Flächen gibt es nur zwei, nahe verwandte, welche urch eine eingliedrige projektive Gruppe in sich transformiert werden. ie sind dadurch charakterisiert daß für sie $[K]$ ein Drehkegel ist und var mit anisotroper oder isotroper Achse. Legt man das Koordinaten- stem wie in Nr. 6 und bezeichnet im ersten Falle $\sigma$ den Winkel zwischen er Kegelachse und den Kegelerzeugenden, $t$ den Parameter der Gruppe, ann lauten in diesem Falle die Transformationsgleichungen

$$x_1 = e^{at\sin\sigma}(x\cos t - y\sin t), \qquad y_1 = e^{at\sin\sigma}(x\sin t + y\cos t),$$

$$z_1 = e^{at\sin\sigma}\cdot z,$$

ährend sie bei isotroper Achse die Form haben

$$x_1 = e^{2ita}((1+2t^2)x + 2it^2 y - 2itz),$$

$$y_1 = e^{2ita}(2it^2 x + (1-2t^2)y + 2tz), \qquad z_1 = e^{2ita}(2itx - 2ty + z).$$

eides sind Grupppen von Drehstreckungen, bei denen die Kegelachse in ch übergeht.

12. Der Fall des Drehkegels $[K_a^2]$. Es sei $[K_a^2]$ ein Drehkegel it anisotroper Rotationsachse $p_a$ und $[P_a^2]$ eine zu ihm gehörende äche $[P]$. Dann läßt sich zeigen

a) $[P_a^2]$ ist die einzige Fläche $[P]$, bei welcher Isogonaltrajektorien r Krümmungslinien (Nr. 4) eben sind. Diese ebenen Isogonaltrajektorien lden eine — im Falle transzendenter logarithmischer Krümmungslinien zählbar unendliche — Menge logarithmischer Spiralen in der Normalebene $p_a$ durch $O$. Damit hängt die Tatsache eng zusammen, daß

b) $[P_a^2]$ als einzige Fläche $[P]$ außer den logarithmischen Krüm- ungslinien noch eine anisotrope logarithmische Spirale mit dem l $O$ enthält.

Die Gleichung von $[P_a^2]$ lautet

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} - e^{-a\left\{\arcsin\frac{z}{\cos\sigma\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \sin\sigma\left[\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\operatorname{tg}\sigma\right)\right]\right\}} = 0.$$

Nach Nr. 11b wird $[P_a^2]$ durch die Kollineationen (6) in sich übergeführt (und durch keine weitere kontinuierliche Gruppe von linearen Transformationen). Hieraus folgen in bekannter Weise zahlreiche Eigenschaften der Flächen $[P_a^2]$, aus denen einige herausgegriffen werden mögen:

Die $W$-Kurven der Transformationen (6) sind zylindrisch-konische Schraubenlinien auf Drehkegeln mit der Achse $p_a$ und der Spitze $O$. Die Projektionen dieser $W$-Kurven in die $X,Y$-Ebene sind algebraische logarithmische Spiralen und damit auch die zylindrisch-konischen Schraubenlinien algebraisch, wenn $a\cdot\sin\sigma$ ein rationales Vielfaches von $i$ ist.

c) $[P_a^2]$ enthält eine einparametrige Schar von zylindrisch-konischen Schraubenlinien.

d) Zu jeder Kurve auf $[P_a^2]$, die nicht $W$-Kurve ist, gibt es eine kontinuierlich unendliche Menge ähnlicher Kurven auf der Fläche.

e) Die Schnitte von $[P_a^2]$ mit anisotropen Ebenen durch $p_a$ sind nur im Maßstabe voneinander verschieden, desgleichen schneiden alle $p_a$ nicht enthaltenden anisotropen Ebenen durch $O$, welche mit $p_a$ den gleichen Winkel einschließen, $[P_a^2]$ in ähnlichen Kurven.

f) Die Haupttangentenkurven jeder Schar sind einander ähnlich.

g) Längs jeder Kurve $(W)$ auf $[P_a^2]$ bilden die Haupttangenten miteinander denselben Winkel.

h) Die Tangentialebenen von $[P_a^2]$ in den Punkten einer $W$-Kurve sind Schmiegungsebenen einer $W$-Kurve.

i) Ist $a\cdot\sin\sigma = \pm i$, dann sind die $W$-Kurven parabolische Kreise in Parallelebenen.

13. Der Fall des Drehkegels $[K_i^2]$. Bezeichnet $[K_i^2]$ einen Drehkegel mit der isotropen Achse $p_i$, dann werden die zugehörigen Flächen $[P_i^2]$ nach Nr. 11b durch die eingliedrige projektive Gruppe (7) in sich transformiert. Hier sind die $W$-Kurven konische Schraubenlinien auf dem Drehkegel mit der Achse $p_i$ und der Spitze $O$, aber nicht gleichzeitig zylindrische Schraubenlinien. Die Punkte von $[P_i^2]$ genügen der Gleichung

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} - e^{a\cdot\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{z^2-2ixy+2y^2}}{x+iy}\right)+a\frac{z-\sqrt{z^2-2ixy+2y^2}}{x+iy}} = 0.$$

Die Sätze Nr. 12d, f, g, h gelten auch hier, von e der erste Teil.

---

[9]) In der in Anm. 4 zitierten Arbeit steht S. 74 infolge eines Druckfehlers in dieser Flächengleichung $\operatorname{arctg}\frac{y}{z}$ statt $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$.

Für die Flächen $[P_a^2]$ und $[P_i^2]$ lassen sich noch charakteristische igenschaften angeben, die sie nicht nur unter den Flächen $[P]$, sondern nter allen Flächen auszeichnen; sie sind nämlich die einzigen Flächen it den beiden Eigenschaften:

1. Es gibt eine eigentliche (anisotrope oder isotrope) Gerade im Raum, uf dieser einen eigentlichen Punkt $O$ so, daß nach jeder Drehung um die erade die Fläche durch eine Streckung von $O$ aus wieder mit ihrer usgangslage zur Deckung gebracht werden kann.

2. Die Fläche enthält ein System anisotroper, kongruenter, nicht-eradliniger ebener Kurven, die dabei ineinander übergehen.

14. Die Flächen mit anisotroper gerader Leitlinie. 1. Fall. er naheliegende Gedanke, nach dem Satze Nr. 5e einer Fläche $[P]$ als infachste willkürliche Kurve eine anisotrope Gerade $g$ vorzuschreiben, führt uf zwei verschiedene spezielle Flächen $[P]$, die mit $[P_{1,a}]$ oder $[P_{1,i}]$ ezeichnet werden mögen, je nachdem die Ebene $(O, g)$ anisotrop oder sotrop ist. Zunächst sei von $[P_{1,a}]$ die Rede.

Legt man $g$ parallel zur $X$-Achse in die $X, Z$-Ebene, dann wird de Tangentialebene des zugehörigen Kegels $[K_{1,a}]$ von der $X, Z$ und er $X, Y$-Ebene in zwei Geraden geschnitten, die miteinander den festen Winkel $\frac{\pi}{2} - \alpha$ einschließen. $[K_{1,a}]$ gehört zu einem elliptischen Kegel . Ordnung, 4. Klasse, der außer 8 Doppelerzeugenden 12 stationäre rzeugende und 2 Doppeltangentialebenen besitzt, dagegen keine stationäre angentialebene.

$[P_{1,a}]$ enthält, je nachdem die logarithmischen Krümmungslinien lgebraisch oder transzendent sind, eine endliche oder abzählbar unendliche enge von zu $g$ parallelen Geraden in der Ebene $(O, g)$. Weitere anisotrope erade liegen nicht auf $[P_{1,a}]$. Die Ebene $(O, g)$ enthält außerdem noch vei logarithmische Krümmungslinien. Die $Y, Z$-Ebene schneidet die läche in einer logarithmischen Krümmungslinie und in einer Menge von reisen durch $O$, die bei algebraischen logarithmischen Krümmungslinien ndlich ist, bei transzendenten abzählbar unendlich.

15. 2. Fall. Die Fläche $[P_{1,i}]$ ist gleichzeitig die Fläche $[P_a^2]$ von r. 12i und enthält demnach eine einparametrige Schar parabolischer reise. In der Ebene $(O, g)$ liegen zu $g$ parallele Gerade der Fläche, und var wieder endlich oder abzählbar unendlich viele, je nach dem algebraischen der transzendenten Charakter der logarithmischen Krümmungslinien. Dies nd die einzigen anisotropen Geraden der Fläche.

Aus den Flächen $[P_{1,a}]$ und $[P_{1,i}]$ kann man als Erweiterung von r. 1b folgern, daß eine Fläche $[P]$ nicht Regelfläche sein kann.

16. Flächen, welche alle Kreise durch zwei feste Punkte unter konstantem Winkel schneiden. Unterwirft man eine Fläche $[P]$ einer Transformation durch reziproke Radien mit dem Anfangspunkt $O$, dann geht sie in eine Fläche $[P]$ mit demselben Pol, Schnittwinkel und Kegel $[K]$ über. Wählt man dagegen für die Transformation einen neuen Anfangspunkt $M$, der nicht mit $O$ auf einer isotropen Geraden liegt, dann entspricht dem Punkt $O$ ein eigentlicher Punkt $N$, und man erhält eine Fläche $[Q]$, welche alle Kreise durch die zwei Punkte $M$ und $N$ unter konstantem Winkel schneidet. Umgekehrt kann die allgemeinste Isogonalfläche dieses Kreissystems vermittels einer Transformation durch reziproke Radien in eine Fläche $[P]$ verwandelt werden. Auf dem Weg über die Flächen $[P]$ kann man nun die Flächen $[Q]$ studieren. Als Beispiel dafür seien zwei Sätze angeführt:

a) Die Krümmungslinien beider Systeme einer Fläche $[Q]$ sind sphärisch. Die Kugeln der einen Schar gehen durch $M$ und $N$, die Mittelpunkte der Kugeln des anderen Systems liegen auf der Geraden $MN$.

b) Sind $M$ und $N$ zwei eigentliche Punkte einer anisotropen Geraden, dann erhält man die allgemeinste Fläche, welche von sämtlichen Kreisen durch $M$ und $N$ unter einem konstanten Winkel $\alpha$ geschnitten wird in der folgenden Weise:

In der mittelsenkrechten Ebene zu $MN$ wählt man eine beliebige Kurve $(C_a)$ und bestimmt sämtliche Kugeln, welche durch $M$ und $N$ hindurchgehen und ihren Mittelpunkt auf $(C_a)$ haben. Dann sucht man eine eigentliche nirgends singuläre Orthogonaltrajektorie $(K)$ dieses Systems von Kugeln und legt durch jeden Punkt von $(K)$ auf der zugehörigen Kugel diejenige Kurve $(A)$, welche die vom Ebenenbüschel mit der Achse $MN$ aus der Kugel ausgeschnittenen Kreise unter dem konstanten Winkel $\alpha$ trifft. Die Gesamtheit der Kurven $(A)$ erzeugt die gesuchte Fläche.

Karlsruhe, im September 1921.

(Eingegangen am 25. September 1921.)

# Der Fundamentalsatz der Lieschen Kugelgeometrie im Euklidischen Raum.

Von

H. Beck in Bonn.

In einer Arbeit „Die beiden Geraden-Kugeltransformationen von ophus Lie“[1]) beschäftigte ich mich mit den Grundlagen der Lieschen Kugelgeometrie, die sich auf folgenden kurzen Satz zurückführen läßt:

*Die Punkte eines (Nichteuklidischen oder Euklidischen) Raumes assen sich auf die geraden Linien des absoluten Komplexes abbilden.*

In der hyperbolischen Geometrie hat der absolute Komplex reelle erade und daher sind meine Formeln auf diesen Fall zugeschnitten; die bbildung ist dann zwei-eindeutig und kann durch *eine Art* Orientierungsrozeß lückenlos umkehrbar eindeutig gestaltet werden, wie die damals hon angekündigte, aber noch nicht erschienene Arbeit von Study es im nzelnen ausführen wird.

Im Grenzfalle der Euklidischen Geometrie wird die Abbildung *eindeutig, aber sie ist mit Singularitäten behaftet*. Die Punkte einer singulären“ Geraden können nicht abgebildet werden und im absoluten omplex (Minimalkomplex) tritt singulär auf das Feld aller uneigentchen Geraden.

Darin liegt mehr als ein bloßer Schönheitsfehler. Wir schließen araus, daß die benutzten Begriffe noch nicht sachgemäß genug gebildet nd. Wir lassen an die Stelle der Minimalgeraden eine etwas andere igur treten, den Minimalkreis, und werden beweisen:

*Fundamentalsatz der Lieschen Kugelgeometrie im Euklidischen Raum: ie Punkte des Raumes lassen sich lückenlos umkehrbar eindeutig abilden auf den Komplex der $\infty^3$ Minimalkreise.*

[1]) Sitzungsberichte der Kgl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften 1917, 51—74.

## § 1.

## Vorbereitende Formeln aus dem $R_4$.

Im vierdimensionalen Raum seien $x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ homogene Koordinaten eines Punktes. Durch eine lineare homogene Gleichung $u_0 x_0 + u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$ ist dann ein dreidimensionaler Raum bestimmt, dem wir die homogenen Koordinaten $u_0 : u_1 : u_2 : u_3 : u_4$ beilegen.

Im $R_4$ betrachten wir die singularitätenfreie dreifach ausgedehnte quadratische Punktmannigfaltigkeit

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0 \tag{1}$$

und bezeichnen sie als $M_3^2$. Ihre Tangentialräume sollen von den übrigen dreidimensionalen Räumen durch die Bezeichnung *isotrop* unterschieden werden. Bedeute abkürzend:

$$(u\,v) = u_0 v_0 - u_1 v_1 - u_2 v_2 - u_3 v_3 - u_4 v_4; \tag{2}$$

dann ist der Raum $u$ isotrop für $(u\,u) = 0$.

Zwei getrennte Räume $u$ und $v$ durchdringen sich in einer Ebene $R_2$; eine solche kann durch zwanzig homogene Graßmannsche Koordinaten dargestellt werden, von denen jedesmal zwei entgegengesetzte Werte annehmen:

$$\mathfrak{E}_{ik} = -\mathfrak{E}_{ki} = u_i v_k - u_k v_i \qquad (i, k = 0, 1, 2, 3, 4).$$

Dann gilt unter Benutzung des Symbols

$$(\mathfrak{E}\,|\,\mathfrak{E}) = \mathfrak{E}_{01}^2 + \mathfrak{E}_{02}^2 + \mathfrak{E}_{03}^2 + \mathfrak{E}_{04}^2 - \mathfrak{E}_{12}^2 - \mathfrak{E}_{13}^2 - \mathfrak{E}_{14}^2 - \mathfrak{E}_{23}^2 - \mathfrak{E}_{24}^2 - \mathfrak{E}_{34}^2 \tag{3}$$

die Beziehung

$$(u\,u)(v\,v) - (u\,v)^2 = -(\mathfrak{E}\,|\,\mathfrak{E}). \tag{4}$$

Zwischen den Ebenenkoordinaten bestehen die fünf quadratischen Identitäten

$$\begin{cases} \text{(a)} & \frac{1}{2}(\mathfrak{E}\mathfrak{E})_0 = \mathfrak{E}_{12}\mathfrak{E}_{34} + \mathfrak{E}_{13}\mathfrak{E}_{42} + \mathfrak{E}_{14}\mathfrak{E}_{23} = 0, \\ \text{(b)} & \frac{1}{2}(\mathfrak{E}\mathfrak{E})_1 = \mathfrak{E}_{23}\mathfrak{E}_{40} + \mathfrak{E}_{24}\mathfrak{E}_{03} + \mathfrak{E}_{20}\mathfrak{E}_{34} = 0, \\ \text{(c)} & \frac{1}{2}(\mathfrak{E}\mathfrak{E})_2 = \mathfrak{E}_{34}\mathfrak{E}_{01} + \mathfrak{E}_{30}\mathfrak{E}_{14} + \mathfrak{E}_{31}\mathfrak{E}_{40} = 0, \\ \text{(d)} & \frac{1}{2}(\mathfrak{E}\mathfrak{E})_3 = \mathfrak{E}_{40}\mathfrak{E}_{12} + \mathfrak{E}_{41}\mathfrak{E}_{20} + \mathfrak{E}_{42}\mathfrak{E}_{01} = 0, \\ \text{(e)} & \frac{1}{2}(\mathfrak{E}\mathfrak{E})_4 = \mathfrak{E}_{01}\mathfrak{E}_{23} + \mathfrak{E}_{02}\mathfrak{E}_{31} + \mathfrak{E}_{03}\mathfrak{E}_{12} = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Zwei Ebenen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}^*$ haben im allgemeinen einen einzigen Schnittpunkt

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = (\mathfrak{E}\mathfrak{E}^*)_0 : (\mathfrak{E}\mathfrak{E}^*)_1 : (\mathfrak{E}\mathfrak{E}^*)_2 : (\mathfrak{E}\mathfrak{E}^*)_3 : (\mathfrak{E}\mathfrak{E}^*)_4, \tag{6}$$

das Symbol $(\mathfrak{E}\mathfrak{E}^*)_i$ aus $(\mathfrak{E}\mathfrak{E})_i$ durch einen Polarisationsprozeß hervor-
t. Z. B. ist

$$(\mathfrak{E}\mathfrak{E}^*)_2 = \mathfrak{E}_{34}\mathfrak{E}^*_{01} + \mathfrak{E}^*_{34}\mathfrak{E}_{01} + \mathfrak{E}_{30}\mathfrak{E}^*_{14} + \mathfrak{E}^*_{30}\mathfrak{E}_{14} + \mathfrak{E}_{31}\mathfrak{E}^*_{40} + \mathfrak{E}^*_{31}\mathfrak{E}_{40}.$$

rch jede Ebene lassen sich sofort fünf Räume angeben, ihre Verbindungs-
me mit den Ecken des Koordinatenpentatops.

$$\begin{cases} \text{(a)} & 0 : \mathfrak{E}_{01} : \mathfrak{E}_{02} : \mathfrak{E}_{03} : \mathfrak{E}_{04}, \\ \text{(b)} & \mathfrak{E}_{10} : 0 : \mathfrak{E}_{12} : \mathfrak{E}_{13} : \mathfrak{E}_{14}, \\ \text{(c)} & \mathfrak{E}_{20} : \mathfrak{E}_{21} : 0 : \mathfrak{E}_{23} : \mathfrak{E}_{24}, \\ \text{(d)} & \mathfrak{E}_{30} : \mathfrak{E}_{31} : \mathfrak{E}_{32} : 0 : \mathfrak{E}_{34}, \\ \text{(e)} & \mathfrak{E}_{40} : \mathfrak{E}_{41} : \mathfrak{E}_{42} : \mathfrak{E}_{43} : 0, \end{cases}$$

n diesen können nicht mehr als drei unbestimmt werden.

Rücksichtlich ihrer Lage zur $M_3^2$ gibt es drei Klassen von Ebenen:

1. $(\mathfrak{E}\,|\,\mathfrak{E}) \neq 0$. $\infty^{2\cdot 6}$. Durch die Ebene laufen zwei getrennte
tropе Räume[2]).

2. 3. $(\mathfrak{E}\,|\,\mathfrak{E}) = 0$. $\infty^{2\cdot 5}$. Diese Ebenen enthalten einen einzigen
tropen Raum, *oder jeder Raum durch die Ebene ist isotrop*. Im
zteren Falle, der noch in $\infty^{2\cdot 3}$ Exemplaren vorkommt, nennen wir
Ebene *vollisotrop*. Die durch die Räume $u$ und $v$ bestimmte Ebene
vollisotrop, wenn

$$\text{a) } (uu) = 0, \qquad \text{b) } (uv) = 0, \qquad \text{c) } (vv) = 0.$$

## § 2.

## Bestimmung aller vollisotropen Ebenen.

Die Formeln (9a – c) liefern, auf die fünf Räume (8a – e) einer
lisotropen Ebene angewandt:

$$\begin{cases} \text{(a)} & * + \mathfrak{E}_{01}^2 + \mathfrak{E}_{02}^2 + \mathfrak{E}_{03}^2 + \mathfrak{E}_{04}^2 = 0, \\ \text{(b)} & -\mathfrak{E}_{10}^2 * + \mathfrak{E}_{12}^2 + \mathfrak{E}_{13}^2 + \mathfrak{E}_{14}^2 = 0, \\ \text{(c)} & -\mathfrak{E}_{20}^2 + \mathfrak{E}_{21}^2 * + \mathfrak{E}_{23}^2 + \mathfrak{E}_{24}^2 = 0, \\ \text{(d)} & -\mathfrak{E}_{30}^2 + \mathfrak{E}_{31}^2 + \mathfrak{E}_{32}^2 * + \mathfrak{E}_{34}^2 = 0, \\ \text{(e)} & -\mathfrak{E}_{10}^2 + \mathfrak{E}_{41}^2 + \mathfrak{E}_{42}^2 + \mathfrak{E}_{43}^2 * = 0. \end{cases}$$

s (10a) folgt dann wegen $(\mathfrak{E}\,|\,\mathfrak{E}) = 0$ noch

$$\mathfrak{E}_{12}^2 + \mathfrak{E}_{13}^2 + \mathfrak{E}_{14}^2 + \mathfrak{E}_{23}^2 + \mathfrak{E}_{24}^2 + \mathfrak{E}_{34}^2 = 0.$$

erin können nicht sämtliche Glieder gleichzeitig verschwinden, weil

[2]) $\infty^{\pm n}$ soll bedeuten, daß es sich um $n$ *komplexe* Konstante handelt.

sonst wegen (10b – d) sämtliche Ebenenkoordinaten Null sein würde. Zu (11) nehmen wir (5a) hinzu:

$$(12)\qquad \begin{cases} (\mathfrak{E}_{34}+\mathfrak{E}_{12})^2+(\mathfrak{E}_{42}+\mathfrak{E}_{13})^2+(\mathfrak{E}_{23}+\mathfrak{E}_{14})^2=0, \\ (\mathfrak{E}_{34}-\mathfrak{E}_{12})^2+(\mathfrak{E}_{42}-\mathfrak{E}_{13})^2+(\mathfrak{E}_{23}-\mathfrak{E}_{14})^2=0. \end{cases}$$

Diese beiden Forderungen befriedigen wir auf allgemeinste Weise so[8]:

$$(13a)\qquad \begin{cases} \mathfrak{E}_{34}+\mathfrak{E}_{12}=\varphi_0^2-\varphi_1^2, & \mathfrak{E}_{34}-\mathfrak{E}_{12}=\varphi_2^2-\varphi_3^2, \\ \mathfrak{E}_{42}+\mathfrak{E}_{13}=i(\varphi_0^2+\varphi_1^2), & \mathfrak{E}_{42}-\mathfrak{E}_{13}=i(\varphi_2^2+\varphi_3^2), \\ \mathfrak{E}_{23}+\mathfrak{E}_{14}=-2\varphi_0\varphi_1, & \mathfrak{E}_{23}-\mathfrak{E}_{14}=-2\varphi_2\varphi_3. \end{cases}$$

Aus jedem System von vier Verhältnisgrößen $\varphi_0:\varphi_1:\varphi_2:\varphi_3$ lassen sich diese sechs $\mathfrak{E}$ eindeutig herstellen. Sind umgekehrt diese gemäß (11) (12) gegeben, so ermitteln sich die $\varphi$ *doppeldeutig*; die Systeme $\varphi_0:\varphi_1:\varphi_2:\varphi_3$ und $\varphi_0:\varphi_1:-\varphi_2:-\varphi_3$ liefern dasselbe System der *sechs* $\mathfrak{E}$.

Für die Ermittlung der noch fehlenden vier Ebenenkoordinaten stehen außer (10b – d) noch die Formeln zur Verfügung, die aus (8b – c) vermöge (9b) hervorgehen:

$$\begin{aligned} &-\mathfrak{E}_{10}\mathfrak{E}_{20}+\mathfrak{E}_{13}\mathfrak{E}_{23}+\mathfrak{E}_{14}\mathfrak{E}_{24}=0, && -\mathfrak{E}_{20}\mathfrak{E}_{30}+\mathfrak{E}_{21}\mathfrak{E}_{31}+\mathfrak{E}_{24}\mathfrak{E}_{34}=0, \\ &-\mathfrak{E}_{10}\mathfrak{E}_{30}+\mathfrak{E}_{12}\mathfrak{E}_{32}+\mathfrak{E}_{14}\mathfrak{E}_{34}=0, && -\mathfrak{E}_{20}\mathfrak{E}_{40}+\mathfrak{E}_{21}\mathfrak{E}_{41}+\mathfrak{E}_{23}\mathfrak{E}_{43}=0, \\ &-\mathfrak{E}_{10}\mathfrak{E}_{40}+\mathfrak{E}_{12}\mathfrak{E}_{42}+\mathfrak{E}_{13}\mathfrak{E}_{43}=0, && -\mathfrak{E}_{30}\mathfrak{E}_{40}+\mathfrak{E}_{31}\mathfrak{E}_{41}+\mathfrak{E}_{32}\mathfrak{E}_{42}=0. \end{aligned}$$

Dadurch sind die Quadrate und Produkte der gesuchten vier Größen bestimmt, und damit diese selbst, abgesehen vom Vorzeichen. Über diese entscheiden wir willkürlich:

$$(13b)\qquad \begin{cases} \mathfrak{E}_{01}=\varphi_0\varphi_3-\varphi_1\varphi_2, & \mathfrak{E}_{03}=\varphi_3\varphi_1+\varphi_0\varphi_2, \\ \mathfrak{E}_{02}=i(\varphi_3\varphi_1-\varphi_0\varphi_2), & \mathfrak{E}_{04}=i(\varphi_0\varphi_3+\varphi_1\varphi_2). \end{cases}$$

Die Formeln (13a, b) lösen die Aufgabe, alle vollisotropen Ebenen des $R_4$ anzugeben: Die Beziehung zwischen den $\varphi$ und den *zehn* $\mathfrak{E}$ ist eindeutig umkehrbar und wird von keinen Ausnahmen durchbrochen.

Satz 1. *Die Gesamtheit der vollisotropen Ebenen des $R_4$ bildet ein quaternäres Gebiet.*

Die Formeln (13a, b) gestalten wir noch etwas um durch die Substitution

$$\varphi_0=\omega_2+i\omega_0,\quad \varphi_1=-\omega_1+i\omega_3,\quad \varphi_2=-\omega_3+i\omega_1,\quad \varphi_3=\omega_1+i\omega_3$$

und erhalten damit für die vollisotropen Ebenen die erschöpfende Darstellung

[8]) Münch. Akad. Ber. 1917, S. 53.

$$\left\{\begin{array}{ll} \mathfrak{E}_{01} = 2i(\omega_2\omega_3 + \omega_0\omega_1), & \mathfrak{E}_{02} = i(\omega_0^2 - \omega_1^2 + \omega_2^2 - \omega_3^2), \\ \mathfrak{E}_{03} = -(\omega_0^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2), & \mathfrak{E}_{04} = 2i(\omega_1\omega_2 - \omega_0\omega_3), \\ \mathfrak{E}_{12} = 2i(\omega_3\omega_1 + \omega_0\omega_2), & \mathfrak{E}_{13} = 2(\omega_3\omega_1 - \omega_0\omega_2), \\ \mathfrak{E}_{14} = -2i(\omega_2\omega_3 - \omega_0\omega_1), & \mathfrak{E}_{23} = 2(\omega_1\omega_2 + \omega_0\omega_3), \\ \mathfrak{E}_{24} = i(\omega_0^2 - \omega_1^2 - \omega_2^2 + \omega_3^2), & \mathfrak{E}_{34} = -(\omega_0^2 + \omega_1^2 - \omega_2^2 - \omega_3^2). \end{array}\right.$$

den rechten Seiten kommen die Koeffizienten einer ternären ortho-
alen Substitution vor. Ist also für die vollisotrope Ebene $\mathfrak{E}$ des $R_4$
Koordinate $\mathfrak{E}_{03} \neq 0$, so ist durch sie die Drehung um den Nullpunkt
$R_3$ bestimmt

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_{30}x' &= -\mathfrak{E}_{34}x + \mathfrak{E}_{23}y + \mathfrak{E}_{13}z, \\ \mathfrak{E}_{30}y' &= -i\mathfrak{E}_{04}x - i\mathfrak{E}_{02}y - i\mathfrak{E}_{01}z, \\ \mathfrak{E}_{30}z' &= -i\mathfrak{E}_{12}x + i\mathfrak{E}_{14}y - i\mathfrak{E}_{24}z. \end{aligned}$$

nit ist die eindeutige Umkehrbarkeit der Formeln (14) gewährleistet
ch für $\mathfrak{E}_{03} = 0$).

Es sei hier nur noch ein Satz von anscheinend ziemlicher Tragweite
ähnt:

*Durch jeden Punkt des $R_4$, der nicht auf der $M_3^2$ liegt, laufen zwei
ig getrennte binäre Scharen vollisotroper Ebenen.*

Beweis mit Hilfe von (6).

## § 3.

## Die Minimalkreise des $R_3$.

Dem Raume $u$ des $R_4$ ordnen wir in bekannter Weise zu die „Kugel“

$$\begin{aligned} &(u_0 + u_4)x_0^2 + (u_0 - u_4)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \\ &\quad + 2u_1x_0x_1 + 2u_2x_0x_2 + 2u_3x_0x_3 = 0 \end{aligned}$$

„Grundraumes“, in welchem, da Punktkoordinaten des $R_4$ nicht mehr
aucht werden, die $x_0$, $x_1$, $x_2$, $x_3$ zur Bezeichnung homogener Punkt-
dinaten verwandt werden können. Dem Grundraum soll also Euklidi-
Struktur beigelegt werden, der absolute Kegelschnitt wird gegeben
h

$$x_0 = 0, \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0.$$

die Kugel einen Mittelpunkt, so heißt dieser

$$u_4 - u_0 : u_1 : u_2 : u_3,$$

das Quadrat des Radius wird $-(uu) : (u_4 - u_0)^2$. Den isotropen
nen des $R_4$ sind folgende Arten spezieller „Kugeln“ zugeordnet: die
malkegel und (reduzible Figuren, deren einen Bestandteil jedesmal

die uneigentliche Ebene bildet, und die daher unterdrückt werden kan die Minimalebenen sowie die uneigentliche Ebene.

Die Ebenen des $R_4$ bilden sich dann ab auf die Kugelbüschel, u damit auf deren Durchdringungsfiguren, die alle unter dem Namen „Kreise zusammengefaßt werden sollen. Gewisse dabei auftretende Schwierigkeit können wir außer acht lassen, da uns hier nur die Bilder der *vollisotrope* Ebene interessieren. Diese nennen wir *Minimalkreise*. Wir zeigen s gleich, daß der Begriff des Minimal*kreises* den der Minimal*geraden* umfa und sodann noch die Tangenten des absoluten Kegelschnitts, daß m also alle Minimalkreise erhält, wenn man aus den Geraden des Minima komplexes, der den Zusammenhang einer im $R_5$ verlaufenden $M_3^4$ besitz ausscheidet die Bisekanten, aber nicht die Tangenten des absoluten Kege schnitts.

a) Das Kugelbüschel enthalte eine einzige reduzible Kugel. Die sei dann $v$, so daß $u_0 - u_4 \neq 0$, $v_0 - v_4 = 0$. Wegen (9c) kann d Kugel $v$, die die Gleichung erhält $v_0 x_0 + v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 = 0$, nic anisotrop sein, wegen (9b) kann sie auch nicht die uneigentliche Eber sein. Sie ist also eine Minimalebene. Alle übrigen Kugeln des Büsche haben nach (9a) den Radius Null; ihre Mittelpunkte erfüllen die Gera

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = \lambda(u_4 - u_0) : \lambda u_1 + \mu v_1 : \lambda u_2 + \mu v_2 : \lambda u_3 + \mu v_3$$

mit den Plückerschen Koordinaten ($\mathfrak{P}_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$; $i, k = 0, 1, 2, 3$

$$(u_4 - u_0) v_1 : (u_4 - u_0) v_2 : (u_4 - u_0) v_3 : u_2 v_3 - u_3 v_2 : u_3 v_1 - u_1 v_3 : u_1 v_2 - u_2 v_1$$

also nach (9c) eine *Minimalgerade*; diese ist die gemeinsame Durch dringungsfigur aller Kugeln des Büschels, hier also als *Minimalkreis* z bezeichnen. Wegen $(u_4 - u_0) v_1 = -(u_0 v_1 - u_1 v_0) - (u_1 v_4 - u_4 v_1) = \mathfrak{E}_{10} - \mathfrak{E}_{1}$ usw. wird dann

$$(16) \quad \begin{cases} \mathfrak{P}_{01} : \mathfrak{P}_{02} : \mathfrak{P}_{03} : \mathfrak{P}_{23} : \mathfrak{P}_{31} : \mathfrak{P}_{12} \\ = \mathfrak{E}_{10} - \mathfrak{E}_{14} : \mathfrak{E}_{20} - \mathfrak{E}_{24} : \mathfrak{E}_{30} - \mathfrak{E}_{34} : \mathfrak{E}_{23} : \mathfrak{E}_{31} : \mathfrak{E}_{12}. \end{cases}$$

b) Das Kugelbüschel enthält nur reduzible Kugeln ($u_0 - u_4 = 0$ $v_0 - v_4 = 0$). Nach (9) ist dann noch $u_1 : u_2 : u_3 = v_1 : v_2 : v_3$. Hier liege außer der uneigentlichen Ebene lauter parallele Minimalebenen vor; ih Durchdringungsgebilde, d. h. der *Minimalkreis*, ist hier eine Tangente de absoluten Kegelschnitts. Ihre Plückerschen Koordinaten sind

$$(17) \quad \mathfrak{P}_{01} : \mathfrak{P}_{02} : \mathfrak{P}_{03} : \mathfrak{P}_{23} : \mathfrak{P}_{31} : \mathfrak{P}_{12} = 0 : 0 : 0 : \mathfrak{E}_{01} : \mathfrak{E}_{02} : \mathfrak{E}_{03}.$$

Es ist jetzt zu zeigen, daß alle Minimalkreise so gewonnen sind Führt man rechts in (16) vermöge (14) die $\omega$ ein, so wird

$$18)\quad \begin{cases} \mathfrak{P}_{01} = -4i\omega_0\omega_1, & \mathfrak{P}_{23} = 2(\omega_1\omega_2 + \omega_0\omega_3), \\ \mathfrak{P}_{02} = -2i(\omega_0^2 - \omega_1^2), & \mathfrak{P}_{31} = 2(\omega_0\omega_2 - \omega_3\omega_1), \\ \mathfrak{P}_{03} = 2(\omega_0^2 + \omega_1^2), & \mathfrak{P}_{12} = 2i(\omega_3\omega_1 + \omega_0\omega_2), \\ & \mathfrak{P}_{00} = 2i(\omega_0\omega_3 - \omega_1\omega_2). \end{cases}$$

abei hat $\mathfrak{P}_{00}$ die Bedeutung [4])

$$_{00} = \mathfrak{P}_{02}\mathfrak{P}_{12} - \mathfrak{P}_{03}\mathfrak{P}_{31} : \mathfrak{P}_{01} = \mathfrak{P}_{03}\mathfrak{P}_{23} - \mathfrak{P}_{01}\mathfrak{P}_{12} : \mathfrak{P}_{02} = \mathfrak{P}_{01}\mathfrak{P}_{31} - \mathfrak{P}_{02}\mathfrak{P}_{23} : \mathfrak{P}_{03}.$$

ie Formeln (18) lassen sich nun nach den $\omega$ eindeutig auflösen, *solange icht* $\omega_0 = \omega_1 = 0$ *ist.* (Im letzteren Falle versagt das System (18); nst stellt es immer eine Minimalgerade dar.)

$$19)\quad \begin{cases} \omega_0 : \omega_1 : \omega_2 : \omega_3 = \mathfrak{P}_{03} + i\mathfrak{P}_{02} : & i\mathfrak{P}_{01} : \mathfrak{P}_{31} - i\mathfrak{P}_{12} : & \mathfrak{P}_{23} - i\mathfrak{P}_{00} \\ = & i\mathfrak{P}_{01} : \mathfrak{P}_{03} - i\mathfrak{P}_{02} : \mathfrak{P}_{23} + i\mathfrak{P}_{00} : & -\mathfrak{P}_{31} - i\mathfrak{P}_{12}. \end{cases}$$

amit lassen sich auch die Formeln (16) eindeutig nach den $\mathfrak{E}$ auflösen.

Im Falle $\omega_0 = \omega_1 = 0$ reduzieren sich die Formeln (14) beträchtlich:

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_{10} = \mathfrak{E}_{14} &= -2i\omega_2\omega_3, & \mathfrak{E}_{23} &= 0, \\ \mathfrak{E}_{20} = \mathfrak{E}_{24} &= -i(\omega_2^2 - \omega_3^2), & \mathfrak{E}_{31} &= 0, \\ \mathfrak{E}_{30} = \mathfrak{E}_{34} &= \omega_2^2 + \omega_3^2, & \mathfrak{E}_{12} &= 0, \\ & \mathfrak{E}_{04} = 0. \end{aligned}$$

adurch geht (17) über in

$$20)\quad \begin{cases} \mathfrak{P}_{01} : \mathfrak{P}_{02} : \mathfrak{P}_{03} : \mathfrak{P}_{23} : \mathfrak{P}_{31} : \mathfrak{P}_{12} \\ = 0 : 0 : 0 : -2i\omega_2\omega_3 : -i(\omega_2^2 - \omega_3^2) : \omega_2^2 + \omega_3^2. \end{cases}$$

Diese Formeln lassen sich nun augenscheinlich eindeutig nach $\omega_2 : \omega_3$ uflösen, und damit auch das System (17) nach den $\mathfrak{E}$. Damit ist voll-ändig bewiesen

Satz 2. *Die Gesamtheit aller Minimalkreise, d. i. der Minimal-raden einschließlich der Tangenten des absoluten Kegelschnitts, bildet n quaternäres Gebiet.*

## § 4.

### Abbildung der Punkte des Raumes auf die Minimalkreise.

Sophus Lie bildet die Minimal*geraden* des Raumes auf die Punkte nes anderen Raumes ab. Daß dabei Singularitäten auftreten müssen, ist ach dem oben Gesagten klar. Im Punktraum, in welchem wir die $\omega$ s homogene Punktkoordinaten zu deuten haben, tritt die singuläre Ge-de $\omega_0 = \omega_1 = 0$ auf. Ihren Punkten sind keine Minimalgeraden zu-

[4]) Leipziger Berichte 64 (1912), S. 37.

geordnet, andererseits entspricht wohl jeder Minimalgeraden ein Punkt *aber nicht immer ein eigentlicher*. Das läßt sich eben nicht erreichen. Daher konnte Lie mit inhomogenen Punktkoordinaten nicht zu brauchbaren Formeln kommen. Sachgemäß sind die Formeln (18), (19). Damit läßt sich aus der Abbildung alles herausholen, was darin steckt; man kann sie dann noch durch eine Substitution der $\omega$ handlicher machen[5]), aber um die singuläre Gerade kommt man nicht herum.

Der einfache Ausweg bietet sich nach Satz 2. Man hat die Minimalgeraden zu ersetzen durch Minimalkreise, also statt (18) die Formeln (14) zu benutzen.

Hauptsatz. *Die Gesamtheit der Minimalkreise eines ersten Raumes läßt sich lückenlos umkehrbar eindeutig abbilden auf die Punkte eines anderen Raumes.*

Der Gedanke, in dieser Weise das Loch in der Lieschen Abbildung zuzustopfen, liegt ja nicht fern, *indessen zeigen erst die Formeln* (14), *daß das zulässig ist.* Daß der Sachverhalt gar nicht so selbstverständlich ist, wollen wir an einem Beispiel zeigen.

Betrachtet man nur die eine Schar von Minimalgeraden einer Euklidischen Ebene, so kann man von einer *orientierten Ebene* reden. Diese Figur von Minimalgeraden ist nicht Träger eines binären Gebietes. Um sie zu einem solchen abzuschließen, darf man nicht die uneigentliche Gerade der Ebene hinzunehmen — damit würden wir aus unserem quaternären Bereich heraustreten. Man kann zur Ergänzung offenbar nur eine Tangente des absoluten Kegelschnitts benutzen, aber hier darf nicht die im gemeinsamen Treffpunkt aller Minimalgeraden genommen werden, sondern die im anderen Durchstoßungspunkt der Ebene mit dem absoluten Kegelschnitt. Man wird das als störend empfinden, die analytischen Tatsachen zwingen aber dazu[6]).

Die Abbildung, die wir hier behandeln, führt gerade Linien des Punktraumes über in eindimensionale Örter von Minimalkreisen, die wir *Sphären* nennen wollen. Daraus folgt, daß alle diese Figuren von den Transformationen einer fünfzehngliedrigen Gruppe vertauscht werden, deren Objekte Minimalkreise sind. Verlangt man, daß die singuläre Gerade $\omega_0 = \omega_1 = 0$ des Punktraumes stehen bleibt, so ergibt sich eine Einteilung der Sphären gegenüber einer elfgliedrigen Gruppe:

---

[5]) Deutsche Math.-Vereinigung 22 (1913), S. 237 ff. Münch. Akad. Ber. 1917, S. 67—72.

[6]) Ähnliche Verhältnisse in Studys Geometrie der Dynamen, S. 255.

| | |
|---|---|
| I. Die singuläre Gerade: | Die *singuläre Sphäre*, d. i. der absolute Kegelschnitt als Ort seiner Tangenten. |
| I. Eine reguläre Gerade des Liniengebüsches, dessen Achse die singuläre Gerade ist: | Die *ebenen Sphären*, d. i. Minimalebenen und orientierte Euklidische Ebenen. |
| I. Eine Gerade, die zur singulären Geraden windschief liegt: | Die *zentrischen Sphären*, d. i. Minimalkegel und *orientierte* Kugeln. |

Das ist die Liesche „Geraden-Kugeltransformation", die jetzt im ıklidischen Raume umkehrbar eindeutig gemacht und ausnahmslos ltig ist.

Bonn, den 4. Januar 1922.

(Eingegangen am 6. Januar 1822.)

## Zusatz bei der Korrektur.

Mittlerweile ist ein Teil der Studyschen Arbeit: „Über S. Lies Geoetrie der Kreise und Kugeln" in Math. Ann. **86** (1922) erschienen. Dort ißt es S. 52 „daß der Einbau der Kugelgeometrie in den Euklidischen aum sich verwickelter gestaltet als das, was wir hier vorhaben". ese Schwierigkeit wird beseitigt sein. Die „orientierten Tangenten" r absoluten Fläche verdienen diesen Namen nicht, wenn man des Autors nstigem Sprachgebrauch folgt. Es sind keine orientierten Geraden, sondern Örter orientierter Ebenen (und auch orientierter Punkte). Die vier adratwurzeln, von denen auf S. 47 die Rede ist, können entbehrt werden. Auch das habe ich in einer bereits druckfertigen Arbeit gezeigt.

Bonn, 20. Juni 1922.

## Nachtrag zur Arbeit über die verschiedenen Arten der Übertragung, M. Z. 13 (1922), S. 56—81.

Von

J. A. Schouten in Delft, Holland.

---

Zur Relation $C_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} = C_\mu \varepsilon_\lambda^{\cdot\nu}$ bemerke ich, daß bei dem auf S. 64 der oben genannten Arbeit nicht näher ausgeführten Beweise eine nähere Bedingung einzuführen ist, die im Texte nicht genannt wurde. Man formuliert diese Bedingung am einfachsten folgendermaßen. Es sollen die Gleichungen der Form $v^\lambda w_\lambda = 0$ bei quasiparalleler Übertragung von $v^\lambda$ und $w_\lambda$ invariant bleiben. Läßt man diese Bedingung fort, so braucht die Relation nicht mehr zu gelten. Die allgemeinste lineare Übertragung ist also gegeben durch drei Felder dritten Grades, $C_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu}$, $S_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu}$ und $Q_\mu^{\cdot\lambda\nu}$. Das Feld $C_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu}$ transformiert sich bei Änderung des kovarianten Maßes folgendermaßen:

$$'C_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} = C_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu} + \varepsilon_\lambda^{\cdot\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \lg \tau. \tag{35 a}$$

Wählt man $C_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu}$ allgemein, so treten zu den achtzehn auf S. 73 aufgezählten Übertragungen noch neun allgemeinere hinzu.

### Druckfehlerverbesserungen.

Das zweite Glied der Gleichung (24) auf S. 64 soll lauten:

$$(\varepsilon_\lambda^{\cdot\alpha} \Gamma_{\alpha\mu}^{\nu} + \varepsilon_\lambda^{\cdot\alpha} \Gamma'^{\nu}_{\alpha\mu})\, dx^\mu.$$

In Formel (88) sind die beiden letzten Vorzeichen zu vertauschen.

In Formel (103) sind die $-$-Zeichen zu streichen.

In den Formeln (117), (118) und (119) ist statt $dx^\alpha dx^\beta dx^\gamma dx^\delta$ zu lesen $|d_1 x^\alpha d_2 x^\beta d_3 x^\gamma d_4 x^\delta|$.

In der Tabelle S. 173 ist in der dritten Spalte hinter IV das Wort allgemein zu ersetzen durch „.

(Eingegangen am 21. Mai 1922.)

# Die Ähnlichkeitsbewegungen beim allgemeinen $n$-Körperproblem.

Von

Ch. H. Müntz in Göttingen.

## Einleitung.

Die sehr geringe Anzahl von positiven Resultaten, die man bisher im allgemeinen $n$-Körperproblem — außer der Gravitation können auch ektrische, magnetische und ähnliche Kräfte wirken — zu erzielen verocht hat, läßt es als lohnend erscheinen, festzustellen, daß wenigstens e diejenigen Bewegungen *vollständig* angebbar sind, bei denen die Gemtkonfiguration der gegebenen Körper beständig sich selbst *ähnlich* bleibt.

Die Erledigung dieser Fragestellung ist besonders vom Standpunkte r gegenwärtig im Entstehen begriffenen *Atomphysik* aus sehr erwünscht; nn es handelt sich dort bei jedem Atom und bei jeder Molekel um omplexe von Kernen und Elektronen, zwischen denen bekannte, rein ektrische Kräfte wirken — die Gravitation kann daneben als verschwind klein angesehen werden —, und man darf zunächst postulieren, daß e Form der betrachteten Komplexe jedesmal im wesentlichen wohlstimmt sein muß.

Es gilt nun im allgemeinen $n$-Körperproblem bei ruhendem Schwerpunkt, was offenbar keine Einschränkung bedeutet, ein alle Fälle umssender *Hauptsatz*:

Es existieren stets die folgenden Arten von Ähnlichkeitsbewegungen, t jedesmal *algebraisch* bestimmten zugehörigen Konfigurationen, und r diese.

I. Bewegung aller Körper auf einer einzigen festen Geraden, gemäß n schon bei *zwei* Körpern geltenden Gesetzen;

II. Bewegung (für $n > 2$) auf entsprechenden festen Geraden eines enen Schwerpunkt*büschels*, nach den gleichen Gesetzen;

III. Bewegung (für $n > 3$) auf entsprechenden festen Geraden eine räumlichen Schwerpunkt*bündels*, ebenfalls nach jenen Gesetzen;

IV. ebene Newton-Keplersche Bewegung aller Körper, bei der si in genau den gleichen Konfigurationen, wie in I. und II., feste ähnlich Kegelschnitte von beliebiger Exzentrizität um den Schwerpunkt als gemein samen Brennpunkt beschreiben — nur beim Auftreten etwaiger *Null*massen können letztere, außer bei reiner Gravitation, teilweise oder gan auch räumlich verteilt sein, der obigen allgemeinen ebenen Bewegung au passenden *räumlich* gelagerten Kegelschnitten folgend;

V. gleichförmige Drehung entsprechender *ebener* Konfiguratione ($n > 2$) um eine feste Achse, durch die die veränderliche gemeinsam Ebene stets hindurchgeht;

VI. gleichförmige Drehung entsprechender *räumlicher* Konfiguratione ($n > 3$) um eine feste Achse.

Im ganz speziellen Falle von *lauter gleichen* Körpern (gleiche Massen gleiche Ladungen usf.) hat anscheinend zuerst Herr Nicholson[1]) auf di Möglichkeit der allgemeinen ebenen Bewegungen IV. in der diesem Fall angepaßten Lagrangeschen Konfiguration — Verteilung auf die Ecke eines regulären ebenen $n$-Ecks — hingewiesen, und Herr Sommerfeld[2] hat diese spezielle Möglichkeit atomtheoretisch verwertet. Ebenso ha Herr N. Bohr[3]) gelegentlich seiner ersten Prüfung des hypothetische Baus der einfachsten Elementarmolekeln einige sehr spezielle Beispiel gleichförmiger Drehung um eine Achse angegeben (V. bis VI.). Der hie mitgeteilte ganz allgemeine Sachverhalt scheint indessen noch nicht be kannt zu sein.

Die Untersuchung zerfällt in zwei Teile; in §§ 1 bis 5 werden di Gesetze der Bewegungen, in §§ 6 bis 9 diejenigen der zugehörigen Kon figurationen der Körper besprochen.

Wir haben uns veranlaßt gesehen, Beispiele aus der Gravitation und Atomphysik zur Illustrierung unserer Sätze heranzuziehen (§§ 6 bis 10) insbesondere dürfte die dabei gegebene Beantwortung der Frage nach dem Bau einer formkonstanten $H_3$-Molekel einiges Interesse beanspruchen (§ 10); auch der Beweis der Reellität der Lösungen zu I., II. und IV beim gewöhnlichen Dreikörperproblem sei hier erwähnt (§ 6).

---

[1]) Phil. Mag. 1914, S. 557.

[2]) Vgl. „Atombau und Spektrallinien", Braunschweig 1921, Kap. 5.

[3]) Phil. Mag. 1913, S. 1; 476; 857.

# A. Die Bewegungsgesetze.

## § 1.

## Die Grundformeln.

Es seien $\xi_k \eta_k \zeta_k$ die rechtwinkligen Koordinaten der gegebenen Körper $(k = 1, \ldots, n)$ zu irgendeiner Anfangszeit $t = t_0$, bei der nur nicht etwa le diese Körper im Nullpunkte zusammenstoßen. Dann ist die allgeeinste Ähnlichkeitsbewegung des ganzen Systems charakterisiert durch:

$$\left\{\begin{aligned} x_k &= (\alpha_x \xi_k + \beta_x \eta_k + \gamma_x \zeta_k) r, \\ y_k &= (\alpha_y \xi_k + \beta_y \eta_k + \gamma_y \zeta_k) r, \\ z_k &= (\alpha_z \xi_k + \beta_z \eta_k + \gamma_z \zeta_k) r, \end{aligned}\right.$$

orin $r = r(t)$ den gemeinsamen Ausdehnungsfaktor bedeutet, während $= \alpha_x(t), \ldots, \gamma_z = \gamma_z(t)$ die Richtungskosinus eines mitbewegten $\xi\eta\zeta$-ezugsystems darstellen, das zur Anfangszeit $t_0$ mit $xyz$ zusammenfällt, daß man hat:

$$\left\{\begin{aligned} & r(t_0) = \alpha_x(t_0) = \beta_y(t_0) = \gamma_z(t_0) = 1, \\ & \alpha_y(t_0) = \alpha_z(t_0) = \beta_x(t_0) = \beta_z(t_0) = \gamma_x(t_0) = \gamma_y(t_0) = 0. \end{aligned}\right.$$

Man setze

$$\alpha_x r = a_x, \ldots, \gamma_z r = c_z$$

nd führe zur allgemeinen Abkürzung ein:

$$a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = \sum a^2, \quad a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = \sum ab, \text{ usf.},$$

hat man

$$\left\{\begin{aligned} x_k &= a_x \xi_k + b_x \eta_k + c_x \zeta_k, \\ y_k &= a_y \xi_k + b_y \eta_k + c_y \zeta_k, \\ z_k &= a_z \xi_k + b_z \eta_k + c_z \zeta_k; \end{aligned}\right.$$

$$\sum a^2 = \sum b^2 = \sum c^2 = r^2; \quad \sum ab = \sum bc = \sum ca = 0,$$

nd, nach zweimaliger Differentiation von (3) nach der Zeit $t$:

$$\sum a\dot{a} = \ldots = r\dot{r}; \quad \sum \dot{a}\dot{b} + \sum a\ddot{b} = \ldots = 0;$$

$$\sum a\ddot{a} + \sum \quad ^2 = \ldots = r\ddot{r} + \dot{r}^2; \quad \sum \ddot{a}b + \sum a\ddot{b} + 2\sum \dot{a}\dot{b} = \ldots = 0.$$

Auf Grund von (4) darf man nun setzen:

$$\left\{\begin{aligned} \sum b\dot{c} &= Ar, & \sum \dot{c}a &= Br, & \sum \dot{a}b &= Cr, \\ \sum \dot{b}c &= -Ar, & \sum c\dot{a} &= -Br, & \sum a\dot{b} &= -Cr; \end{aligned}\right.$$

die direkte Auflösung von (4), (6) ergibt dann:

$$(7)\quad \begin{cases} r\dot{a}_x = \dot{r}a_x + Cb_x - Bc_x, & r\dot{b}_x = \dot{r}b_x + Ac_x - Ca_x, \ldots, \\ r\dot{a}_y = \dot{r}a_y + Cb_y - Bc_y, & \ldots \quad , \ldots, \\ \ldots \quad \ldots & , \end{cases}$$

folglich einerseits:

$$(7a)\quad A(r\dot{a}_x - \dot{r}a_x) + B(r\dot{b}_x - \dot{r}b_x) + C(r\dot{c}_x - \dot{r}c_x) = 0, \text{ usf.}$$

andererseits, wegen (3), (5):

$$(8)\quad \Sigma\dot{a}^2 = \dot{r}^2 + B^2 + C^2, \quad \Sigma\dot{b}^2 = \dot{r}^2 + C^2 + A^2, \ldots;$$

$$(8a)\quad \Sigma\dot{a}\dot{b} = -AB, \quad \Sigma\dot{b}\dot{c} = -BC, \ldots;$$

$$(8b)\quad \Sigma a\ddot{a} + B^2 + C^2 = r\ddot{r}, \ldots, \ldots;$$

$$(8c)\quad \Sigma b\ddot{c} + \Sigma\ddot{b}c = 2BC, \ldots, \ldots.$$

Zu diesen Beziehungen kommen nun noch die Differentialgleichungen des Problems hinzu; sind $m_i$ die gegebenen Massen, $c_{ik} = c_{ki}$ die bekannten gegenseitigen Kräftekonstanten, $\varrho_{ik} = \varrho_{ki}$ die Anfangsentfernungen der Körper und $r_{ik} = \varrho_{ik} \cdot r$ die Entfernungen zur Zeit $t$, so hat man unter $\Sigma'$ stets die Summation über $i = 1, \ldots, n$ *außer* $i = k$ verstanden:

$$(9)\quad m_k \ddot{x}_k = r^{-3} \Sigma' c_{ik}(x_i - x_k)\varrho_{ik}^{-3},$$

$$\ldots \quad \ldots$$

Andererseits hat man aus (2):

$$(9a)\quad \ddot{x}_k = \xi_k \ddot{a}_x + \eta_k \ddot{b}_x + \zeta_k \ddot{c}_x, \ldots, \ldots;$$

durch Bildung der Ausdrücke:

$$K_a = a_x \ddot{x}_k + a_y \ddot{y}_k + a_z \ddot{z}_k, K_b, K_c$$

und Berücksichtigung von (3) erhält man so als analytischen Ausdruck unserer gesamten Fragestellung:

$$(10)\quad \begin{cases} m_k\xi_k \Sigma a\ddot{a} + m_k\eta_k \Sigma a\ddot{b} + m_k\zeta_k \Sigma a\ddot{c} = r^{-1} \Sigma' c_{ik}(\xi_i - \xi_k)\varrho_{ik}^{-3}; \\ m_k\xi_k \Sigma b\ddot{a} + m_k\eta_k \Sigma b\ddot{b} + m_k\zeta_k \Sigma b\ddot{c} = r^{-1} \Sigma' c_{ik}(\eta_i - \eta_k)\varrho_{ik}^{-3}; \\ m_k\xi_k \Sigma c\ddot{a} + m_k\eta_k \Sigma c\ddot{b} + m_k\zeta_k \Sigma c\ddot{c} = r^{-1} \Sigma' c_{ik}(\zeta_i - \zeta_k)\varrho_{ik}^{-3}, \end{cases}$$

für $k = 1, \ldots, n$, im ganzen also $3n$ Gleichungen zur Bestimmung der Gesetze der Bewegung und der gegenseitigen Lage der Körper.

## § 2.

## Bewegung räumlicher Systeme.

Es sei zunächst vorausgesetzt, daß für $t = t_0$, und damit auch ständig, nicht alle $n' \leqq n$ von Null verschiedenen Massen des Systems — und diese sind für die Bewegung ausschlaggebend — sich in einer Ebene be-

ıden. Dann existieren jedenfalls drei derartige Indizes $k_1, k_2, k_3$, daß r dieselben die Determinante $|m_{k_1}\xi_{k_1}\ldots m_{k_3}\zeta_{k_3}|$ der linken Seiten von 0) nicht verschwindet; durch direkte Auflösung dieser Grundgleichungen ıdet man also mit passenden *Konstanten* $q$:

1) $$\sum a\ddot{a} = \frac{q_{aa}}{r}, \quad \sum a\ddot{b} = \frac{q_{ab}}{r}, \ldots, \ldots, \quad \sum c\ddot{c} = \frac{q_{cc}}{r}.$$

Die Beziehungen (8b) bis (8c) ergeben daraufhin

1a) $$B^2 + C^2 = r\ddot{r} - \frac{q_{aa}}{r}, \quad AB = \frac{q_{ab}+q_{ba}}{2r}, \ldots, A^2 + B^2 = r\ddot{r} - \frac{q_{cc}}{r},$$

oraus unter allen Umständen, mit neuen Konstanten $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, r_0$, folgt:

2) $$A = \alpha_0 r^{-\frac{1}{2}}, \quad B = \beta_0 r^{-\frac{1}{2}}, \quad C = \gamma_0 r^{-\frac{1}{2}};$$

3) $$r^3\ddot{r} = r_0.$$

Es möge zunächst der extreme Fall $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 0$ behandelt erden; man hat dann aus (12) und (7):

2*) $$A = B = C = 0;$$

$$r a_x - \dot{r} a_x = 0, \qquad \frac{a_x}{r} = \alpha_x = \text{konst.} = \alpha_x(t_0) = 1,$$

d ebenso sind überhaupt alle Richtungskosinus konstant; mit Rücksicht f (1a) und (1) erhält man jetzt als Bewegungsgleichungen, neben (13):

3*) $$x_k = \xi_k r, \quad y_k = \eta_k r, \quad z_k = \zeta_k r,$$

h. die Bewegung erfolgt auf festen Strahlen durch den Schwerpunkt d entspricht dem Fall III des in der Einleitung gegebenen Satzes.

Bei allen sonstigen Werten der Konstanten $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ erhält man aus (12) d (7a) mit Rücksicht auf (1a):

2a) $$\begin{cases} \alpha_0(r\dot{a}_x - a\dot{r}_x) + \beta_0(r\dot{b}_x - \dot{r}b_x) + \gamma_0(r\dot{c}_x - \dot{r}c_x) = 0, \ \ldots, \ \ldots; \\ \alpha_0\dfrac{a_x}{r} + \beta_0\dfrac{b_x}{r} + \gamma_0\dfrac{c_x}{r} = \alpha_0\alpha_x + \beta_0\beta_x + \gamma_0\gamma_x = \text{konst.} = \alpha_0, \end{cases}$$

f., woraus infolge der Orthogonalität noch folgt:

2b) $$\begin{cases} \alpha_0\alpha_x + \beta_0\alpha_y + \gamma_0\alpha_z = \alpha_0, \quad \alpha_0\beta_x + \beta_0\beta_y + \gamma_0\beta_z = \beta_0, \\ \alpha_0\gamma_x + \beta_0\gamma_y + \gamma_0\gamma_z = \gamma_0. \end{cases}$$

Die Bewegungsgleichungen (1) liefern daraufhin:

3a) $$\alpha_0 x_k + \beta_0 y_k + \gamma_0 z_k = (\alpha_0\xi_k + \beta_0\eta_k + \gamma_0\zeta_k)r;$$

ne Einschränkung der Allgemeinheit läßt sich aber bei $\alpha_0^2 + \beta_0^2 + \gamma_0^2 \neq 0$ nehmen, daß der linksstehende Ausdruck proportional zu $z_k$ selbst ist, sich dies durch eventuelle Änderung des gewählten Bezugssystems

stets erreichen läßt; es ist dies gleichbedeutend mit der speziellen Festsetzung $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, $\gamma_0 \neq 0$, also aus (12a):

$$\alpha_z = \beta_z = 0, \quad \gamma_z = 1, \quad \gamma_x = \gamma_y = 0, \tag{14}$$

so daß man fernerhin setzen darf:

$$\alpha_x = \cos\varphi, \quad \beta_x = -\sin\varphi, \quad \alpha_y = \sin\varphi, \quad \beta_y = \cos\varphi. \tag{14a}$$

Führt man noch ebene Polarkoordinaten ein:

$$\xi_k = \varrho_k \cos\varphi_k, \quad \eta_k = \varrho_k \sin\varphi_k, \tag{15}$$

so nehmen jetzt die Gleichungen (1) die folgende Gestalt an:

$$x_k = \varrho_k r \cos(\varphi + \varphi_k), \quad y_k = \varrho_k r \sin(\varphi + \varphi_k); \tag{16}$$

$$z_k = \zeta_k r. \tag{16a}$$

Daraus hat man direkt:

$$\begin{cases} \ddot{x}_k \cos(\varphi + \varphi_k) + \ddot{y}_k \sin(\varphi + \varphi_k) = \varrho_k (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2), \\ -\ddot{x}_k \sin(\varphi + \varphi_k) + \ddot{y}_k \cos(\varphi + \varphi_k) = \varrho_k (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}), \end{cases} \tag{17}$$

folglich, wenn für $\ddot{x}_k$, $\ddot{y}_k$ die Ausdrücke aus (9) eingesetzt werden:

$$m_k \varrho_k (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = r^{-2} \sum{}' c_{ik} [\varrho_i \cos(\varphi_i - \varphi_k) - \varrho_k] \varrho_{ik}^{-3}, \tag{17a}$$

$$m_k \varrho_k (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}) = r^{-2} \sum{}' c_{ik} \varrho_i \sin(\varphi_i - \varphi_k) \varrho_{ik}^{-3}. \tag{17b}$$

Multipliziert man jede der letzten Gleichungen mit $\varrho_k$ und summiert, so entsteht, wegen $\sum_k^{1..n} m_k \varrho_k^2 \neq 0$:

$$2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi} = 0, \quad r^2 \dot{\varphi} = \omega_0 = \text{konst.}, \tag{18}$$

während andererseits aus (17a) noch folgt:

$$r^2 (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = r_1 = \text{konst.}; \tag{18a}$$

die Konfigurationsbedingungen (17a), (17b) werden damit also zu:

$$m_k \varrho_k r_0 = \sum{}' c_{ik} [\varrho_i \cos(\varphi_i - \varphi_k) - \varrho_k], \tag{19}$$

$$0 = \sum{}' c_{ik} \varrho_i \sin(\varphi_i - \varphi_k). \tag{19a}$$

Aus (18), (18a) erhält man jetzt durch Elimination von $\dot{\varphi}$ und Integration:

$$\ddot{r} = \frac{r_1}{r^2} + \frac{\omega_0^2}{r^3}, \quad \dot{r}^2 = c_0 - \frac{2r_1}{r} - \frac{\omega_0^2}{r^2}, \text{ usf.}; \tag{20}$$

nun hat aber noch aus (13):

$$\ddot{r} = \frac{r_0}{r^2}; \tag{20a}$$

es muß also entweder sein:

$$r_1 = r_0, \quad \omega_0 = 0, \quad \dot{\varphi} = 0, \quad \varphi = \text{konst.} = \varphi(t_0) = 0, \tag{21}$$

rauf man wieder die Gleichungen (13*) und eine Bewegung auf festen raden durch den Schwerpunkt vor sich hat (III), oder:

2) $$r = \text{konst.} = r(t_0) = 1, \quad \dot{\varphi} = \omega_0; \quad \varphi = \omega_0 t, \quad \zeta = \zeta_k,$$

h. die Bewegung ist eine gleichförmige ausdehnungslose Drehung um $z$-Achse, und man hat es mit dem Fall VI unseres Hauptsatzes zu tun

## § 3.

## Bewegung ebener Konfigurationen.

Es mögen nunmehr alle gegebenen schweren Massen zur Zeit $t_0$ und mit auch ständig, in einer *Ebene*, aber zunächst nicht in einer einzigen raden liegen. Man kann jene gemeinsame Anfangsebene zur Ebene $xy$ hlen und somit allgemein $\zeta_k = 0$ setzen, worauf die Grundgleichungen ) wie folgt lauten:

3) $$\begin{cases} m_k \xi_k \sum a \ddot{a} + m_k \eta_k \sum a \ddot{b} = r^{-1} \sum' c_{ik} (\xi_i - \xi_k) \varrho_{ik}^{-3}, \\ m_k \xi_k \sum b \ddot{a} + m_k \eta_k \sum b \ddot{b} = r^{-1} \sum' c_{ik} (\eta_i - \eta_k) \varrho_{ik}^{-3}, \\ m_k \xi_k \sum c a + m_k \eta_k \sum c \ddot{b} = 0. \end{cases}$$

Nach Voraussetzung lassen sich hier zwei Indizes $k_1$, $k_2$ derart finden, ß die Determinante $|m_{k_1} \xi_{k_1} \ldots m_{k_2} \eta_{k_2}|$ von Null verschieden ausfällt; raus folgt mit passenden Konstanten $q$ wiederum, wie in § 2, nur mit igen Modifikationen:

4) $$\sum a \ddot{a} = \frac{q_{aa}}{r}, \quad \sum b \ddot{a} = \frac{q_{ba}}{r}, \quad \sum a \ddot{b} = \frac{q_{ab}}{r}, \quad \sum b \ddot{b} = \frac{q_{bb}}{r};$$

4a) $$\sum c \ddot{a} = \sum c \ddot{b} = 0.$$

5) $$B^2 + C^2 = r \ddot{r} - \frac{q_{aa}}{r}, \quad C^2 + A^2 = r \ddot{r} - \frac{q_{bb}}{r}, \quad 2AB = \frac{q_{ab} + q_{ba}}{2r};$$

5a) $$A = \alpha_0 r^{-\frac{1}{2}}, \quad B = \beta_0 r^{-\frac{1}{2}}.$$

Die Differentiation der Definitionsgleichungen (6), von denen wir auf und von (25a) bloß

6) $$\sum c \dot{a} = -\beta_0 r^{\frac{1}{2}}, \quad \sum c \dot{b} = \alpha_0 r^{\frac{1}{2}}$$

sschreiben, liefert infolge von (8a) und (24a):

6a) $$AC = \alpha_0 r^{\frac{1}{2}} C = \frac{\beta_0}{2} r^{-\frac{1}{2}} \dot{r}; \quad BC = \beta_0 r^{\frac{1}{2}} C = -\frac{\alpha_0}{2} r^{-\frac{1}{2}} \dot{r},$$

raus aber entweder

6b) $$\alpha_0^2 + \beta_0^2 = 0,$$

er

7) $$\alpha^2 + \beta^2 \neq 0, \quad C = 0, \quad \dot{r} = 0, \quad r = \text{konst.} = r(t_0) = 1$$

folgt. Der letztere Fall entspricht mit (25a) durchaus demjenigen von (12a), (12b) in § 2, nur mit der Spezialisierung $\gamma_0 = 0$; er bedeutet demnach eine *ausdehnungslose gleichförmige Drehung der gesamten ebenen Konfiguration um eine in der xy-Ebene liegende feste Achse*, durch welche somit die gemeinsame Ebene der schweren Massen stets hindurch gehen muß — es liegt also der Fall V des Hauptsatzes vor.

Im Falle (26a) dagegen erhält man bei naturgemäßer Beschränkung auf nur reelle Bewegungen — wie bei (13a) —:

$$\alpha_0 = 0, \quad \beta_0 = 0, \quad A = B = 0. \tag{27a}$$

Wird auch $C = 0$ angenommen, so hat man, wie bei (12*), die Bewegung auf festen Geraden, hier aber in einer einzigen Ebene $(xy)$, vor sich — Fall II — und die Gleichungen (25) enthalten dann als Gesetz der Bewegung wieder die Beziehung (13). Ist dagegen $C \neq 0$, so hat man aus (7a), wie bei (12a):

$$\gamma_z = 1, \qquad \alpha_z = \beta_z = 0, \tag{28}$$

folglich, wegen $\zeta_k = 0$, aus (1):

$$z_k = \zeta_k r = 0, \tag{28a}$$

d. h. die Bewegung erfolgt auch hier in der *festen* $xy$-Ebene.

Im übrigen gelten wieder die Beziehungen (16), (17) bis (20) des vorigen Paragraphen, wobei die Differentialgleichungen (18) und (18a) von der Anzahl der gegebenen Körper überhaupt nicht abhängen; dieselben werden sich auch bei *zwei* Körpern wieder einfinden (v. u.), ihre mit (20) einsetzende Lösung ist also notwendig die klassische Newton-Keplersche; sie führt zu synchronen Bewegungen auf festen ähnlichen Kegelschnitten, deren einer Brennpunkt sich im Schwerpunkt des Systems befindet, und dies bedeutet den Fall IV unseres allgemeinen Hauptsatzes.

## § 4.

## Geradlinige Systeme.

Es bleibt noch der Fall zu betrachten, daß alle gegebenen schweren Massen von Anfang an in einer Geraden liegen, so daß für sie $\eta_k = \zeta_k = 0$ angenommen werden kann.

Die Grundgleichungen (10) liefern hier:

$$r \sum a \ddot{a} = r_0 = \text{konst.}, \qquad \sum b \ddot{a} = 0, \qquad \sum c \ddot{a} = 0, \tag{29}$$

woraus man durch direkte Auflösung nach den $\ddot{a}$ erhält:

$$r^3 \ddot{a}_x = r_0 a_x, \qquad r^3 \ddot{a}_y = r_0 a_y, \qquad r^3 \ddot{a}_z = r_0 a_z. \tag{30}$$

Unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen (1a) folgt daraus
n, mit konstanten $\beta_0, \gamma_0$:

)a) $$\begin{cases} \ddot{a}_x a_y - \ddot{a}_y a_x = 0, & \dot{a}_x a_y - \dot{a}_y a_x = \text{konst.}, \ldots; \\ \dot{a}_y a_z - a_y \dot{a}_z = 0; & a_y = \beta_0 w, \quad a_z = \gamma_0 w. \end{cases}$$

Entweder ist nun $\beta_0 = \gamma_0 = 0$, also

1) $$a_x = r; \quad x_k = \xi_k r, \quad y = 0, \quad z = 0; \quad r^2 \ddot{r} = r_0,$$

h. die Bewegung erfolgt nach den Gesetzen des Zweikörperproblems
er Geraden — denn die letztgewonnene Differentialgleichung, die mit
3) übereinstimmt und auch für die Fälle der ebenen und räumlichen
nlichkeitsbewegungen auf festen Geraden gültig gewesen ist (§§ 2, 3),
ngt wieder von der Anzahl der gegebenen Körper überhaupt nicht ab
in der *fest*bleibenden $x$-Achse. Oder man hat hier für alle schweren
ssen

1a) $$\begin{cases} x_k = a_x \xi_k, & y_k = a_y \xi_k, & z_k = a_z \xi_k, \\ & y_k : z_k = a_y : a_z = \beta_0 : \gamma_0, \end{cases}$$

d die Bewegung erfolgt in einer festen, die $x$-Achse enthaltenden Ebene;
ztere kann dann von vornherein zur $xy$-Ebene gewählt werden, so daß
an $\beta_0 = 1$, $\gamma = 0$ setzen darf, worauf

1b) $$a_z = 0, \quad z_k = 0; \quad a_x^2 + a_y^2 = r^2, \quad a_x = r \cos\varphi, \quad a_y = r \sin\varphi$$

, und man so des weiteren wieder einen besonderen Fall von (16) vor
h hat, mit

2) $$\varphi_k = 0, \quad \varrho_k = \xi_k, \quad \zeta_k = 0;$$

e Gültigkeit der Beziehungen (17) bis (20) bleibt daher bestehen, man
t es wieder, wie in § 3, mit einer Newton-Keplerschen Bewegung
tun (IV) mit der einzigen Besonderheit, daß hier die Konfiguration
er Körper speziell eine geradlinige ist.

Es verdient bemerkt zu werden, daß *jede* Bewegung mit geradlinig
ibenden Konfigurationen im allgemeinen $n$-Körperproblem — außer bei
er festen Geraden — notwendig eine Ähnlichkeitsbewegung darstellt und
nit zu den soeben erledigten gehört. Man hat dann nämlich:

3) $$\begin{cases} x_k = \alpha_x r_k, & y_k = \alpha_y r_k, & z_k = \alpha_z r_k; \\ \ddot{x}_k = \ddot{\alpha}_x r_k + 2\dot{\alpha}_x \dot{r}_k + \alpha_x \ddot{r}_k = \sum{}' c_{ik}(x_i - x_k) r_{ik}^{-3}, \ldots; \\ \beta_x \ddot{x}_k + \beta_y \ddot{y}_k + \beta_z \ddot{z}_l = r_k \sum \ddot{\alpha}\beta + 2\dot{r}_k \sum \dot{\alpha}\beta = 0; \\ \dot{r}_k : r_k = -\sum \ddot{\alpha}\beta : 2\sum \dot{\alpha}\beta = \dot{r}_i : r_i; \\ r_i \dot{r}_k - r_k \dot{r}_i = 0, \quad r_i : r_k = \text{konst.}, \end{cases}$$

z. b. w. Offenbar gilt für *eben* bleibende Konfigurationen ein solcher
tz *nicht*, wie schon bei $n = 3$ zu sehen ist.

## § 5.

## Bewegung von Nullmassen.

In allen schon betrachteten Fällen müssen sich etwa vorhandene Nullmassen einfach der Ähnlichkeitsbewegung aller übrigen anschließen. Weder bei der homogenen Ausdehnung auf festen Geraden (I bis III) noch bei der gleichförmigen Drehung um eine feste Achse wird dadurch am Gesamtcharakter der Bewegung etwas geändert, nur die Konfigurationen der Körper können entsprechende Erweiterungen erfahren (geradlinige in ebene, ebene in räumliche übergehen). Anders bei den allgemeinen Newton-Keplerschen Bewegungen (IV) — es ist dort nur zu verlangen, daß auf jede der verschwindenden Massen auch verschwindende resultierende Kräfte einwirken, wodurch die zunächst unbestimmt bleibenden Beschleunigungen dieser Massen *jede* Bewegung derselben zulassen[4]); wegen der vorausgesetzten Wahrung der Ähnlichkeit kommen aber natürlich nur solche Bewegungen in Betracht, die sich den hier für die schweren Massen geltenden Gesetzen:

$$(35)\quad x_k = \varrho_k r\cos(\varphi+\varphi_k),\quad y_k = \varrho_k r\sin(\varphi+\varphi_k),\quad r(1+\varepsilon_0\cos\varphi)=p_0,$$

unmittelbar anschließen; es gilt also für jede Nullmasse notwendig:

$$(35\,a)\qquad x_i = \varrho_i r\cos(\varphi+\varphi_i),\quad y_i = \varrho_i r\sin(\varphi+\varphi_i),\quad z_i = \zeta_i r,$$

und damit, soweit $\zeta_i \neq 0$ ist:

$$(35\,b)\quad x_i^2+y_i^2=\varrho_i^2\frac{z_i^2}{\zeta_i^2};\quad \varepsilon_0(x_i\cos\varphi_i+y_i\sin\varphi_i)=\varrho_i\varepsilon_0 r\cos\varphi=\varrho_i\left(p_0-\frac{z_i}{\zeta_i}\right),$$

d. h. die Bewegung erfolgt auf einem räumlich gelegenen Kegelschnitt, der für $\varrho_i = 0$ in die doppelt gezählte $z$-Achse übergeht.

Es könnte noch vorkommen, daß eine einzige schwere Masse vorhanden ist, die alsdann für sich den ruhenden Schwerpunkt darstellt, oder daß überhaupt nur Nullmassen vorliegen. Die resultierenden (elektrischen usf.) Gesamtkräfte an jedem der Körper müssen in diesen Fällen von selbst verschwinden, und *jede* Ähnlichkeitsbewegung ist dann allerdings theoretisch möglich. Wir haben auf diesen extremen und an sich gleichgültigen Fall in der Einleitung nicht erst hinweisen zu sollen geglaubt; nur die Betrachtung der dabei aus dem Verschwinden aller Kräfteresultanten entstehenden Gleichungen kann hier noch einiges Interesse bieten — sie soll in der allgemeinen weiteren Untersuchung der Konfigurationsbedingungen (Teil B) mit erledigt werden.

---

[4]) Der Fall reiner Gravitation ist dabei allerdings regulär, da in ihm allgemein $c_{ik} = \gamma m_i m_k$ ist, und die Massen $m_k$ sich somit aus den Gleichungen (9) wegheben.

## B. Die Konfigurationsgleichungen.

### § 6.

### Der Fall I.

Der einfachste Fall der Ähnlichkeitsbewegung ist natürlich derjenige, dem alle gegebenen Körper auf einer einzigen festen Geraden verben. Das Gesetz der Bewegung ist hier (§ 4).

) $$r^2 \ddot{r} = r_0,$$

der elementaren Bedeutung, wie schon bei *zwei* Körpern:

a) $$\dot{r}^2 = c_0 - \frac{2r_0}{r}, \quad t - t_0 = \int_1^r dr : \sqrt{c_0 - \frac{2r_0}{r}}, \quad \text{usf.};$$

zugehörigen Konfigurationsgleichungen, aus (31) und (9), sind:

) $$m_k \xi_r r_0 = \sum{}' c_{ik}(\xi_i - \xi_k)\varrho_{ik}^{-3}; \quad \varrho_{ik} = |r_i - r_k|.$$

Wir beschränken uns auch weiterhin nur auf reelle Bewegungen und erscheiden demgemäß die Lösungen des so erhaltenen Systems (37) h ihrer Reihenfolge auf der gemeinsamen Geraden. Es sei irgendeine timmte Festsetzung darüber gewählt, etwa:

a) $$\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_n,$$

ei allerdings der Beweis der Reellität der Wurzeln gemäß einer solchen tsetzung jedesmal noch nachträglich zu liefern wäre, was nicht immer glich ist: so läßt sich beispielsweise offenbar keine geradlinige Ähnlichsbewegung erzielen, wenn man auf zwei *positiv* geladene schwere Körper n sehr leichten und schwach *negativ* geladenen dritten folgen läßt.

Auf Grund der Festsetzung (37 a) nehmen nun die Gleichungen (37) folgende Gestalt an:

) $$0 = m_k \xi_k r_0 - \sum{}' c_{ik} \operatorname{sign}(i-k)(\xi_i - \xi_k)^{-2},$$

wir haben somit *zwei* Fälle zu unterscheiden:

1. $r_0 = 0$, d. h. die resultierenden Kräfte sind an jedem der Körper ch Null, so daß unter anderem auch eine Ruhelage derselben möglich d; das System (38) ist dabei nicht unabhängig, da die Summe der nten Seiten für $k = 1, \ldots, n$ identisch verschwindet, also etwa schon ersten $n-1$ Gleichungen allein genügen; als Unbekannte kommen die Differenzen $\xi_i - \xi_k$ vor, so daß man nur $n-1$ von ihnen, beilsweise $\xi_2 - \xi_1, \xi_3 - \xi_2, \ldots, \xi_n - \xi_{n-1}$ als eigentliche Variable zu behten hätte; die Gleichungen des Systems sind in diesen Variablen

*homogen*, man hat es also mit $n-1$ Gleichungen für $n-2$ Unbekannte $\frac{\xi_3-\xi_2}{\xi_2-\xi_1}, \ldots, \frac{\xi_n-\xi_{n-1}}{\xi_2-\xi_1}$ zu tun, und es fragt sich nun, ob diese Gleichungen dann miteinander verträglich sind.

Daß dies nicht immer zutrifft, läßt sich ohne weiteres schon am Beispiel der gewöhnlichen Gravitation ersehen, die i. a. keine Ruhelage zuläßt. Die Konstanten des Problems sind also hier einer Zusatzbedingung unterworfen, die in der algebraischen Resultante des Systems (38) für $r_0 = 0$ enthalten ist; erst nach Erfüllung dieser Bedingung ist dann eine gleichförmige Bewegung aller Massen (für $m_1 = \ldots = m_n = 0$, $c_{ik} + \gamma m_i m_k$ auch jede sonstige Ähnlichkeitsbewegung) wohl möglich — man denke etwa an den rein elektrischen Fall zweier gleichen Ladungen (mit $m_1 = m_2$) zwischen denen in der Mitte eine 4 mal kleinere dritte ruht.

2. $r_0 \neq 0$; setzt man hier $r_0 = \xi_0^{-3}$, so werden die $n$ Gleichungen (38) *homogen* in bezug auf $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ und stellen somit ein System für die eigentlichen Unbekannten $\frac{\xi_1}{\xi_0}, \ldots, \frac{\xi_n}{\xi_0}$ dar, von dem nun zu zeigen wäre, daß es *unabhängig* ist, also für die algebraische Bestimmung dieser Unbekannten gerade ausreicht.

Da es nur auf die Verhältnisse $\xi_1 : \xi_2 : \ldots : \xi_n$ allein ankommt, darf man ohne Einschränkung der Allgemeinheit $r_0 = 1$ setzen. Die Funktionaldeterminante $C$ des Systems (38) hat dann zu allgemeinen Gliedern:

$$(39) \qquad \begin{cases} \Delta_{kk} = \Delta_{kk}^{(0)} = m_k - \sum{}' 2\, c_{ik}\, \mathrm{sign}\,(i-k)\cdot(\xi_i - \xi_k)^{-3}, \\ \Delta_{ki}(i \neq k) = \Delta_{ki}^{(0)} = 2\, c_{ik}\, \mathrm{sign}\,(i-k)\cdot(\xi_i - \xi_k)^{-3}, \end{cases}$$

und es muß bewiesen werden, daß diese Determinante nicht identisch gleich Null sein kann.

Die erste Kolonne ersetzen wir nach Addition aller übrigen durch:

$$(39_1) \qquad \Delta_{k1}^{(1)} = \Delta_{kk} + \sum{}' \Delta_{ki} = m_k,$$

und verfahren dann systematisch folgendermaßen. Die zweite Zeile werde durch Addition der ersten verwandelt in:

$$(39_2) \qquad \begin{cases} \Delta_{21}^{(2)} = m_1 + m_2, \qquad \Delta_{22}^{(2)} = m_2 - \sum_{i>2}{}' 2\, c_{i2}\,(\xi_i - \xi_2)^{-3}, \\ \Delta_{2i}^{(2)}(i > 2) = \Delta_{1i} + \Delta_{2i}. \end{cases}$$

Dann kommt $(\xi_2 - \xi_1)^{-3}$ nur noch im Gliede $\Delta_{12}^{(2)} = \Delta_{12}$ vor, ein identisches Verschwinden der Funktionaldeterminante $C$ zieht also wegen (39) entweder $c_{21} = 0$ oder $C_{21} = 0$ nach sich, unter $C_{21}$ die komplementäre Unterdeterminante zu $\Delta_{12}^{(2)}$ verstanden; der erste Fall kann nicht allgemein für alle

ppelindizes gelten, es sei denn, daß man es mit einem vollkommen kräfte-
en System zu tun hätte, was natürlich nicht in Betracht zu kommen
ucht; im zweiten Falle behandeln wir die Unterdeterminante $C_{21}$ genau
der gleichen Weise wie vorhin $C$, ihre erste Zeile wieder zur zweiten
ierend, usf. Als hinreichende und notwendige Bedingung für das Ver-
winden von $C$ erhält man so zuletzt:

) $m_1 + m_2 + \ldots + m_n = 0$, d. h. $m_1 = m_2 = \ldots = m_n = 0$,

welchem Falle das Problem mit dem entsprechenden, unter 1. erledigten
ammenfällt; sonst aber hat man es in (38) tatsächlich mit einem voll-
ndigen algebraischen System zu tun, und wenigstens im klassischen
ikörperfalle der Gravitation kann dann noch die Reellität und Ein-
tigkeit der Lösung für *jede* mögliche Reihenfolge dargetan werden (für
$= 0$ und reine Kreisbewegung schon bei Lagrange).

Man hat hier, wenn $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$ vorausgesetzt wird:

$$\left\{\begin{aligned} \gamma^{-1} r_0 \xi_1 &= \quad m_2 (\xi_2 - \xi_1)^{-2} + m_3 (\xi_3 - \xi_1)^{-2}, \\ \gamma^{-1} r_0 \xi_2 &= \quad m_3 (\xi_3 - \xi_2)^{-2} - m_1 (\xi_2 - \xi_1)^{-2}, \\ \gamma^{-1} r_0 \xi_3 &= -\, m_1 (\xi_3 - \xi_1)^{-2} - m_2 (\xi_3 - \xi_2)^{-2}, \end{aligned}\right.$$

lich, durch Elimination von $r_0$:

a) $$m_1 \xi_1 + m_2 \xi_2 + m_3 \xi_3 = 0;$$

b) $$\xi_1 (\xi_3 - \xi_2)^{-2} - \xi_2 (\xi_3 - \xi_1)^{-2} + \xi_3 (\xi_2 - \xi_1)^{-2} = 0.$$

Wird noch

c) $$(\xi_3 - \xi_2) : (\xi_2 - \xi_1) = \xi$$

etzt, so muß nur $\xi$ positiv ausfallen; (41a) und (41c) ergeben:

) $\xi_1 : \xi_2 : \xi_3 = -[m_2 + m_3 (1 + \xi)] : [m_1 - m_3 \xi] : [m_2 \xi + m_1 (1 + \xi)]$,

, nach Einsetzen in (41b) und Multiplikation mit $1 + \xi$:

a) $$f(\xi) = -\frac{m_2 + m_3}{\xi^2} - \frac{m_2 + 2 m_3}{\xi} - \frac{m_1 + m_3}{1 + \xi} + m_2 \xi (1 + \xi) + m_1 (1 + \xi)^2 = 0.$$

Nun ist ersichtlich:

b) $$f(0) = -\infty, \quad f(+\infty) = +\infty, \quad f'(\xi > 0) > 0;$$

existiert daher in der Tat eine einzige positive Wurzel $\xi = \xi_0$, deren
setzen in (42) das Problem alsdann zur Lösung bringt.

## § 7.

## Die Fälle II und III.

Bei reiner homogener Ausdehnung auf festen Geraden einer Ebene ($x$ hat man — vgl. (27a) in § 4, usf. —:

$$x_k = \xi_k r, \quad y_k = \eta_k r; \quad r^2 \ddot{r} = r_0; \tag{43}$$

$$\begin{cases} m_k \xi_k r_0 = \sum' c_{ik}(\xi_i - \xi_k)\varrho_{ik}^{-3}, \\ m_k \eta_k r_0 = \sum' c_{ik}(\eta_i - \eta_k)\varrho_{ik}^{-3}, \end{cases} \tag{44}$$

$$\varrho_{ik}^2 = (\xi_i - \xi_k)^2 + (\eta_i - \eta_k)^2; \quad \varrho_{ik} > 0. \tag{44a}$$

Durch geeignete Wahl des $\xi\eta$-Bezugssystems läßt sich im allgemeine Falle, bei dem $r_0 \neq 0$ ist und wieder (wie in § 6) $r_0 = 1$ gesetzt werde darf, etwa $\eta_1 = 0$ annehmen; dann aber hätte man es in (44) m $2n$ Gleichungen für nur $2n-1$ Unbekannte zu tun, und es muß dahe erst gezeigt werden, daß eine ebene Lösung auch existiert, während fü $\eta_2 = \ldots = \eta_n = 0\ (= \eta_1)$ das schon erledigte geradlinige System von (38 entsteht. Die Gleichungen (44) sind jedoch tatsächlich nicht unabhängi voneinander: denn man braucht dieselben nur paarweise zu kombinieren um daraus die Beziehungen

$$0 = \sum_i' c_{ik}(\xi_i \eta_k - \eta_i \xi_k)\varrho_{ik}^{-3} \tag{44b}$$

zu erhalten, deren Summe für $k = 1, \ldots, n$ (wegen $c_{ik} = c_{ki}$) identisch verschwindet. Infolge dieses Zusammenhangs enthalten nun die Glei chungen (44) auch wirklich ebene Lösungen, und für $n = 3$ möge dies noch direkt verifiziert werden. Man hat hier nach der Festsetzung vor $\eta_1 = 0$ aus (44):

$$0 = c_{21}\eta_2 \varrho_{21}^{-3} + c_{31}\eta_3 \varrho_{31}^{-3}, \quad 0 = m_2 \eta_2 + m_3 \eta_3; \tag{45}$$

soll die geradlinige Lösung $\eta_2 = \eta_3 = 0\ (= \eta_1)$ beiseite gelassen werden, so muß demnach

$$m_2 c_{31} \varrho_{31}^{-3} = m_3 c_{21} \varrho_{21}^{-3} \tag{45a}$$

gelten, und aus Analogiegründen ist noch vollständiger:

$$m_1 c_{23} \varrho_{23}^{-3} = m_2 c_{31} \varrho_{31}^{-3} = m_3 c_{12} \varrho_{12}^{-3}, \tag{45b}$$

so daß, außer bei den extremen Daten

$$0 = m_1 c_{23} = m_2 c_{31} = m_3 c_{12}, \tag{45c}$$

die gesuchte Form des Dreiecks aus den gegebenen Körpern damit völlig bestimmt ist. Besonders einfach gestaltet sich dieses Resultat für den Fall von reiner Gravitation $c_{ik} = \gamma m_i m_k$; man erhält dann aus (45b):

$$\varrho_{23}^{-3} = \varrho_{31}^{-3} = \varrho_{12}^{-3}, \tag{46}$$

h. das gesuchte Dreieck ist, unabhängig von den Massen der Körper, ts *gleichseitig* (für reine Kreisbewegung schon bei Laplace), was natürh beim Übergang zu einer oder zwei Nullmassen nicht bestehen bleibt.

Auch im Sonderfall (45c) sollten jedenfalls nicht alle $c_{ik}$ verschwinden gl. § 6); ist $m_1 \neq 0$, $m_2 \neq 0$, $m_3 = 0$, $c_{31} = 0$, $c_{23} = 0$, so hat man ben $\eta_1 = 0$ auch $\eta_2 = 0$, im übrigen eigentlich einen reinen Zweikörperl mit beliebiger Lage des keine Kräfte ausübenden und keinen unterrfenen dritten Nullkörpers; ist $m_1 = m_2 = 0$, $m_3 \neq 0$, $c_{12} = 0$, so hat an neben $\eta_1 = 0$ noch $\xi_3 = \eta_3 = 0$, die Schwermasse ruht und darf erdies keine Wirkung auf die Nullmassen ausüben, so daß, entgegen r oben getroffenen Festsetzung, dennoch *alle* $c_{ik}$ gleich Null sind.

Es bleibt noch die Annahme $r_0 = 0$ zu prüfen; es verschwinden dann e Summen der rechten Seiten von (44) für $k = 1, \ldots, n$ identisch, und an erhält somit $2(n-1)$ Bedingungen für die $2n-3$ unbekannten rhältnisse $\xi_2 - \xi_1 : \ldots : \eta_n - \eta_{n-1}$, auf die es allein ankommt; durch ssende Wahl des $\xi\eta$-Bezugssystems läßt sich ferner ohne weiteres etwa $= \eta_{n-1}$ erreichen, wodurch aber auch die entsprechenden beiden $\eta$-Gleiungen in (44) identisch ausfallen und das Problem so nur etwas verfacht wird. Das betrachtete System ist also jedenfalls wieder ein einh überzähliges und erfordert (wie in § 6) die Erfüllung einer durch ne Resultante gegebenen Zusatzbedingung für die vorliegenden Konnten; da die geradlinige Lösung in der allgemeinen ebenen mit entlten ist, so umfaßt die erwähnte Bedingung auch die früher angegebene 6). Daß dann wirklich auch ebene Ruhekonfigurationen möglich sind, ieht man etwa aus dem rein elektrischen Beispiel eines im Schwerpunkt genden Zentralkörpers, um den symmetrisch drei gleiche andere, $-\sqrt{3}$-l stärker geladene, liegen.

Der besondere Fall von lauter Nullmassen erledigt sich in der ichen Weise.

Bei der homogenen Ausdehnung auf *räumlichen* Schwerpunktsgeraden t man die obigen Betrachtungen in einer derart einfachen Weise zu allgemeinern, daß eine besondere Ausführung unnötig erscheint. Zu vähnen ist hier nur die Möglichkeit der räumlichen Verteilung von r Körpern *beliebiger* Masse auf die Ecken eines regulären Tetraeders im lle reiner Gravitation.

## § 8.

## Der Fall IV.

Die Konfigurationsgleichungen für die ebene Newton-Keplersche wegung *aller* gegebenen Körper sind gegeben durch die Systeme (19), 9a), und zwar einerlei, ob die Konfigurationen selbst eben sind (vgl. § 4)

oder nur geradlinig (§ 5), in welch letzterem Falle allgemein $\varphi_k = 0$ ist, was dann die identische Erfüllung von (19a) nach sich zieht. Durch paarweise Kombination der beiden Systeme, nämlich Multiplikation mit $\cos\varphi_k$, $-\sin\varphi_k$, bzw. mit $\sin\varphi_k$, $\cos\varphi_k$, und Addition, erhält man unter Berücksichtigung von (15):

$$(47) \qquad \begin{cases} m_k \xi_k r_0 = \Sigma'(\xi_i - \xi_k)\varrho_{ik}^{-3}, \\ m_k \eta_k r_0 = \Sigma'(\eta_i - \eta_k)\varrho_{ik}^{-3}; \end{cases}$$

der Fall geradliniger Konfiguration ist hierin für $\eta_k = 0$ mit enthalten. Es stimmen aber diese Gleichungen genau mit (44) vom Falle II bzw. für $\eta_k = 0$, mit (37) vom Falle I überein, so daß die dort gewonnenen Konfigurationen ohne weiteres auch hier gültig bleiben.

Der Grund dieser immerhin bemerkenswerten Übereinstimmung ist offenbar der, daß die Gleichungen (47) die Exzentrizität $\varepsilon_0$ und der Parameter $p_0$ der Kegelschnittbahnen — vgl. (35) — gar nicht enthalten, somit auch einen Übergang zu doppeltgezählten geradlinigen Bahnen zulasssen, wenn nur die Gesetze der Bewegung dadurch nicht etwa verletzt werden; letzteres ist aber nicht der Fall, da es sich dabei einfach um den Übergang von den Differentialgleichungen (20) zu (20a) handelt, was durch die Beziehungen (21) erfüllt wird; die allgemein gültigen Konfigurationen aus (47) werden dadurch nicht tangiert. —

Beim Auftreten einer einzigen Nullmasse — außer wenn sie keine Kraftwirkungen ausübt, wodurch sie gleichgültig werden würde — muß dieselbe notwendig mit in die $xy$-Ebene der übrigen Massen hineinkommen, da sonst bei den letzteren unzulässige Kraftkomponenten in der $z$-Richtung entstehen würden. Schon das Auftreten von *zwei* Nullkörpern aber läßt, außer bei reiner Gravitation, die in § 5 erwähnte Möglichkeit *räumlicher* Teilnahme der letzteren an der ebenen Ähnlichkeitsbewegung der übrigen zu. Die Konfigurationsgleichungen lauten hier auf Grund von (35), (35a) zunächst so wie (47), wobei aber die $\varrho_{ik}$ auch $\zeta$-Komponenten besitzen; ferner kommen noch die Gleichungen

$$(47a) \qquad 0 = \Sigma' e_{ik}(\zeta_i - \zeta_k)\varrho_{ik}^{-3}$$

für das allgemeine Verschwinden der resultierenden Kraftexponenten in der $z$-Richtung hinzu, genau in der nötigen Anzahl. Daß neben der ebenen Grundlösung $\zeta_i = 0$ dann auch räumliche Möglichkeiten entstehen, kann man an irgendeinem Beispiel zeigen, etwa:

$$(48) \quad m_1 \neq 0 \quad m_2 \neq 0, \; m_3 = m_4 = 0; \; e_1 = e_2 = e \text{ (Ladungen)}, \; e_3 = e_4 = re,$$

s Problem als ein rein elektrisches aufgefaßt; mit

$$8a) \quad \begin{cases} \xi_1 = -m_2\,\xi_0, \quad \xi_2 = m_1\,\xi_0, \quad \eta_1 = \ldots = \eta_4 = 0, \quad \zeta_1 = \zeta_2 = 0, \\ \xi_3 = \xi_4 = \dfrac{m_1 - m_2}{2}\,\xi_0, \quad \zeta_3 = -\zeta_4 = \sqrt{2}\,\xi_0, \quad \nu = \dfrac{16\sqrt{6}}{9} \end{cases}$$

t man eine Lösung vor sich, bei der die Nullmassen tatsächlich auf ten *räumlich gelagerten* Kegelschnitten mitbewegt werden, die für $= m_2$ beide in die $z$-Achse übergehen.

## § 9.

## Die Drehungen (V—VI).

Nach dem Vorausgegangenen wird es genügen, sich bei den gleichmigen Drehungen ebener und räumlicher Konfigurationen um eine Achse, e sie allein noch übriggeblieben sind, auf die Angabe der Eigenschaften r zugehörigen Konfigurationen, ohne eingehende Beweise, zu beschränken.

Bei ebenen Konfigurationen muß — der Kopernikanische Spezial- $\varepsilon_0 = 0$ der ebenen Newton-Keplerschen Bewegung kommt hier ht mehr in Frage — die gemeinsame Ebene stets die feste Drehachse halten (§ 3). Nehmen wir zur letzteren, in leichter Modifikation gegen her, die $z$-Achse, so kann man allgemein $\eta_k = 0$ voraussetzen und hat, nn $\omega_0$ die konstante gemeinsame Winkelgeschwindigkeit bedeutet, das stem

$$) \quad \begin{cases} m_k\,\xi_k\,r_0 = \sum' c_{ik}(\xi_i - \xi_k)\,\varrho_{ik}^{-3}; \quad r_0 = -\omega_0^2; \\ \varrho_{ik}^2 = (\xi_i - \xi_k)^2 + (\zeta_i - \zeta_k)^2; \\ 0 = \sum' c_{ik}(\zeta_i - \zeta_k)\,\varrho_{ik}^{-3} \end{cases}$$

sich. In den letzteren Gleichungen kommen nur die Differenzen $- \zeta_k$ vor, die Größe der $\zeta_k$ selbst wird durch $m_1\zeta_1 + \ldots + m_n\zeta_n = 0$ egelt, die Summe der rechten Seiten für $k = 1, \ldots, n$ ist wieder gleich ll; die ersten Gleichungen dagegen sind voneinander unabhängig. Das tem genügt also gerade zur Auffindung der Lösungen. Im Falle reiner vitation muß allgemein $\zeta_k = 0$ genommen werden, was nichts Neues ibt (§ 8) — die bei $\zeta_{max}$ bzw. $\zeta_{min}$ gelegenen Massen würden hier ftkomponenten in der $\zeta$-Richtung erhalten. Sonst aber sind auch klich ebene Lösungen möglich, wie man z. B. für den rein elekchen Fall

$$) \quad \begin{cases} m_1 \neq 0, \quad e_1 \neq 0, \quad \xi_1 = -1, \quad \zeta_1 = 0; \\ m_2 = m_3 = \dfrac{m_1}{2}, \quad e_2 = e_3 = -\dfrac{e_1}{2}, \quad \xi_2 = \xi_3 = 1, \end{cases}$$

hen kann, wobei die Lösung durch $\zeta_2 = -\zeta_3 = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ gegeben ist.

Bei räumlichen Konfigurationen hat man, ebenfalls für die Drehung um die $z$-Achse, das System mit *räumlichen* $\varrho_{ik}$:

$$(51)\qquad \begin{cases} m_k \xi_k r_0 = \sum' c_{ik}(\xi_i - \xi_k)\varrho_{ik}^{-3}, \\ m_k \eta_k r_0 = \sum' c_{ik}(\eta_i - \eta_k)\varrho_{ik}^{-3}; \quad r_0 = -\omega_0^2, \\ 0 = \sum' c_{ik}(\zeta_i - \zeta_k)\varrho_{ik}^{-3}, \end{cases}$$

mit wieder wohlbestimmten Lösungen, in denen diejenigen von (49) mit enthalten sind — Beispiele v. u.

## § 10.

## Anwendungen.

Die gegebenen Sätze finden ihre wesentlichste Anwendung in der Theorie des Atom- und Molekelbaus, obwohl die Hypothese von der Konstanz der Form der in Frage kommenden Komplexe durchaus nicht bindend zu sein braucht: so sind in angeregtem Zustande sicherlich Übergänge zwischen den verschiedenen stabilen Formen möglich, und die Feststellung der letzteren bedeutet daher nur einen ersten Zugang zur Mannigfaltigkeit der möglichen Erscheinungen.

Ob man nun mit Lenard und Sommerfeld H-Kerne und Elektronen allein als Bausteine ansieht, oder mit Rutherfords wenigstens früheren Anschauungen einen einzigen kompakten Atomkern bei jedem Element voraussetzt, oder auch nach dem Vorgange von N. Bohr solche Atomkerne in den Molekeln gelegentlich mit je einer passenden Anzahl von Elektronen zu kompakten Verbänden zusammenfügt: in jedem Falle ergibt die Annahme konstanter Formen ein Problem, das als Spezialisierung der hier allgemein erledigten Fragestellung angesehen werden kann.

Die algebraische Multiplizität der Antwort bedeutet also, daß dann i. a. *mehrere* Formen des Atoms bzw. der Molekel möglich sind; jede Form kann dabei in den verschiedensten Größen vertreten sein. *Makro*-energetische Betrachtungen an endlichen Stoffmengen verlangen daher die Aufstellung eines entsprechenden allgemeinen Verteilungsgesetzes für alle diese Formen und Größen.

Für die *Einzel*vorgänge aber im Atom und in der Molekel, namentlich für die Uebergänge zwischen den verschiedenen Größentypen bei der gleichen Form, sowie für den Übergang von einer bestimmten solchen Form und Größe zu einer anderen hat Herr N. Bohr in seiner Theorie der Spektrallinien (l. c.) empirisch prüfbare Kriterien gegeben, die sich bei den grundlegenden Fällen des H- und des He-Spektrums bewährt haben.

Schon bei der $H_2$-Molekel finden sich jedoch die aus dem von Bohr selbst vorgeschlagenen Modell — zwei ruhende H-Kerne mit symmetrisch umkreisenden beiden Elektronen, Spezialfall von V — folgenden Spektrallinien in dem zugehörigen sog. *zweiten* H-Spektrum in Wirklichkeit kaum

', und nicht viel günstiger steht es um das umgekehrte Modell, mit
enden Elektronen.

Nun sind nach unseren Untersuchungen (§§ 6—9) noch andere
nstante Formen für $H_2$ möglich, und deren empirische Nachprüfung
ibt tatsächlich *bessere* Resultate. Bei den verbleibenden Fällen für
-VI erhält man allerdings $\omega_0^2 < 0$, die Bewegung ist also nicht reell;
den Fällen I — III erfolgt entweder ein Zerfall der Molekel oder ein
sammenstoß und Neutralisierung aller ihrer Teile; bei symmetrischer
ordnung in bezug auf eine Achse im Falle IV erfolgt in hyperbolischer
wegung wieder ein Zerfall der Molekel. Es lassen sich aber die vier
rper für die Newton-Keplerschen Bewegungen IV noch symmetrisch
die Ecken eines Rhombus verteilen (die beide Kerne auf der $\xi$-, die
den Elektronen auf der $\eta$-Achse, der Schwerpunkt in der Mitte), wo-
die Diagonalen desselben sich in erster Annäherung verhalten wie
: 1; die Spektrallinien dieser energetisch stabilsten $H_2$-Form finden sich
sächlich zahlreich und mit recht guter Annäherung im erwähnten Viel-
en-$H_2$-Spektrum vor. Auch eine (und nur eine) formstabile *geradlinige*,
igens unsymmetrische, Verteilung ist für $H_2$ möglich, mit einem inneren
ktron zwischen den beiden Kernen, und einem äußeren, verhältnismäßig
t entfernten; das letztere kann dann aus dem Verbande entfernt werden,
durch ein $H_2^+$-Ion entsteht, in welchem die beiden Kerne symmetrisch
das in die Mitte gerückte innere Elektron kreisen — wiederum lassen
die entsprechenden Wellenlängen im $H_2$-Spektrum zahlreich nachweisen.

Die Bohrsche Vorstellung der Punktverbände von Einzelkernen und
ktronen kann man für zusammengesetzte (Verbindungs-) Molekeln noch
in ergänzen, daß dabei, wie immer möglich, eine solche Einbeziehung
r verfügbaren Elektronen stattfinden soll, daß sich dann die resul-
enden Ladungen der Einzelatome verhalten wie ihre Valenzen.

Beim Falle von $HNO_3$ hat man so z. B. die Möglichkeit ruhender
und N-Atome ($m_1 = m_H$, $m_2 = m_N = 14\, m_H$, $e_1 = +e$, $e_2 = 5e$),
die drei aktive O-Atome ($m_O = 16\, m_H$, $e_O = -2e$) in einer zur
enden $z$-Achse symmetrischen Konfiguration — reguläres Dreieck,
$\neq 0$ — gleichförmig kreisen; es ist dies ein unter VI fallendes System.
weiterer Fall solcher Art ist etwa durch $H_2SO_4$ gegeben ($m_S = 32\, m_H$,
$= 6e$), wenn dabei $m_S$ im Schwerpunkte und die beiden $m_H$ symmetrisch
u auf der festen $z$-Achse ruhen, während die vier O-Atome sich wieder
symmetrischer Konfiguration — Quadrat um S in der $xy$-Ebene —
chförmig um jene Achse drehen. Wenigstens als erste Annäherungen
d man solche Konfigurationen gelten lassen dürfen.

(Eingegangen am 15. August 1921.)

# Bemerkung zum allgemeinen Waringschen Problem.

Von

E. Kamke in Münster i. W.

Das Ziel der folgenden Zeilen ist die Verschärfung der allgemeinen Waringschen Behauptung, die unter Verwendung der von Herrn Hilbert am speziellen Waringschen Problem entwickelten Methoden von mir[1] kürzlich bewiesen ist, zu folgendem Wortlaut[2]):

*Zu jeder natürlichen Zahl $k$ gibt es eine natürliche Zahl $s = s(k)$ mit folgender Eigenschaft: Es sei*

$$P(z) = \sum_{\nu=1}^{k} a_\nu z^\nu$$

*ein Polynom $k$-ten Grades mit ganzzahligen $a_\nu$ und mit $a_k > 0$; es sei $T$ der größte gemeinsame Teiler aller[3]) für ganzzahliges $z$ entstehenden Werte des Polynoms $P(z)$. Dann gibt es ein $Z_0 = Z_0(P) > 0$, so daß für jedes ganze $Z > Z_0$ die Gleichung*

---

[1]) *Verallgemeinerungen des Waring-Hilbertschen Satzes* [Inaugural-Dissertation. Göttingen 1921; sowie Math. Ann. **83** (1921), S. 85—112]. Die allgemeine Waringsche Behauptung findet sich in der von mir bewiesenen Form a. a. O. S. 2 o., bzw. S. 86 o. Ein anderer Beweis auf Grund der Hardy-Littlewoodschen Methode ist von Herrn Landau gegeben worden (vgl. Math. Zeitschrift **12** (1922), S. 219—247). Dabei erscheint die zur Darstellung einer Zahl benötigte Anzahl von Polynomwerten als abhängig nur vom Grad und höchsten Koeffizienten des Polynoms. Hier wird gezeigt, daß die Anzahl unter gewissen notwendig zu machenden Voraussetzungen auch unabhängig vom höchsten Koeffizienten des Polynoms gewählt werden kann.

[2]) Dafür, daß der alte Wortlaut in diesem enthalten ist, vgl. die beiden letzten Zeilen der Arbeit.

[3]) Da $(a_1, \ldots, a_k) \mid T$ und (vgl. z. B. Landau, a. a. O., Fußnote 9) $T \mid k!\,(a_1, \ldots, a_k)$ ist, kann man, wie unmittelbar aus $\frac{P(z+k!\,\lambda)}{(a_1, \ldots, a_k)} \equiv \frac{P(z)}{(a_1, \ldots, a_k)} \pmod{k!}$ folgt, $T$ auch als größten gemeinsamen Teiler der für $k!$ aufeinander folgende ganze $z$ entstehenden Zahlen $P(z)$ definieren.

$$TZ = \sum_{x=1}^{s} P(z_x)$$

*rch ganze Zahlen $z_x$ lösbar ist, für die $P(z_x) \geqq 0$.*

Der (völlig elementare) Beweis ist eine Modifikation des früheren und ruht wesentlich auf folgendem

Hilfssatz 1. *Zu jedem ganzen $k \geqq 2$ gibt es natürliche Zahlen $(k)$, $A(k)$, sowie positive Zahlen $j_\nu$, $J_\nu$ $(j_\nu < J_\nu)$ für $\nu = 1, \ldots, k$ und , so daß für jedes $L > L_0$ und je $k$ ganze Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, welche e Ungleichungen*

$$j_\nu L^\nu < \lambda_\nu < J_\nu L^\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, k)$$

*üllen, die Gleichungen*

$$A\lambda_\nu = \sum_{x=1}^{N} x_x^\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, k)$$

*nultan durch ganze Zahlen $x_x \geqq 0$ lösbar sind.*

Beweis. Der Hilfssatz ist eine leichte Umformung des *Kernsatzes* f S. 5 bzw. S. 89 meiner angeführten Arbeit. Die Zahl $k$ des Hilfs- zes ist das $n$ des Kernsatzes, und die Zahlen $N$, $A$ des Hilfssatzes d die des Kernsatzes. Die Zahlen $j_\nu$, $J_\nu$ werden (wie a. a. O., S. 14 w. S. 98) folgendermaßen bestimmt: Zu den Zahlen $i_\nu$, $I_\nu$ des Kernsatzes[4]) t es wegen $0 < i_\nu < I_\nu$ zwei positive Zahlen $j_1, J_1$, so daß

$$1 < \frac{J_1}{j_1} < \min_{\nu=2,\ldots,n} \sqrt[\nu]{\frac{I_\nu}{i_\nu}}$$

. Es werde

$$L_0 = \frac{i_1}{j_1 A};\quad j_\nu = i_\nu J_1^\nu A^{\nu-1},\quad J_\nu = I_\nu j_1^\nu A^{\nu-1} \qquad (\nu = 2, \ldots, k)$$

setzt. Dann ist $0 < j_\nu < J_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, k)$ und für $L > L_0$ und je $n$ nze Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, welche

$$j_\nu L^\nu < \lambda_\nu < J_\nu L^\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, k)$$

üllen, bei $l_\nu = A\lambda_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ auch

$$l_1 > A j_1 L_0 = i_1,$$

d für $\nu = 2, \ldots, k$ unter Benutzung von (1) für die Indizes $\nu$ und 1:

$$l_\nu > A j_\nu L^\nu > A j_\nu \frac{\lambda_1^\nu}{J_1^\nu} = A^\nu i_\nu \lambda_1^\nu = i_\nu l_1^\nu,$$

$$l_\nu < A J_\nu L^\nu < A J_\nu \frac{\lambda_1^\nu}{j_1^\nu} = A^\nu I_\nu \lambda_1^\nu = I_\nu l_1^\nu;$$

[4]) Man lese $I_\nu$ an Stelle der dortigen Type $J_\nu$.

d. h. die Bedingungen des Kernsatzes sind erfüllt. Mithin sind die Gleichungen des Kernsatzes, d. h. (2) lösbar.

Hilfssatz 2. *Es seien gegeben natürliche Zahlen* $k$, $a_1, \ldots, a_k$ *und positive Zahlen* $j_\nu, J_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, k)$ *mit* $j_\nu < J_\nu$; *es werde* $\tau = (a_1, \ldots, a_k)$ *gesetzt. Dann gibt es positive Zahlen* $h, H$ $(h < H)$, *so daß für jedes hinreichend große* $L$ *und jede ganze Zahl* $\zeta$ *des Intervalls*

$$hL^k < \zeta < HL^k \tag{3}$$

*die Gleichung*

$$\tau\zeta = a_k\lambda_k + \ldots + a_1\lambda_1$$

*durch ganze Zahlen* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ *unter Einhaltung der Bedingungen*

$$j_\nu L^\nu < \lambda_\nu < J_\nu L^\nu \qquad (\nu = 1, \ldots, k) \tag{4}$$

*lösbar ist.*

Beweis (durch Schluß von $k-1$ auf $k$).

a) $k = 1$. Dann ist $\tau\zeta = a_1\lambda_1$ zu lösen. Da $\tau = a_1$ ist, heißt die Lösung $\lambda_1 = \zeta$ und erfüllt bei $h = j_1$, $H = J_1$ wegen (3) auch (4).

b) Der Hilfssatz sei schon bis $k-1$ als richtig erwiesen; d. h. es möge, wenn $\tau' = (a_1, \ldots, a_{k-1})$ ist, solche Zahlen $0 < h' < H'$ geben, daß für jedes hinreichend große $L$ und jede ganze Zahl $\zeta'$ des Intervalls

$$h'L^{k-1} < \zeta' < H'L^{k-1} \tag{5}$$

die Gleichung

$$\tau'\zeta' = a_{k-1}\lambda_{k-1} + \ldots + a_1\lambda_1 \tag{6}$$

unter Einhaltung der in Frage kommenden Ungleichungen (4) (nämlich für $\nu = 1, \ldots, k-1$) lösbar ist.

Die Kongruenz

$$\tau\zeta \equiv \tau'\zeta' \pmod{a_k}$$

ist wegen $(\tau', a_k) = \tau$ bei jedem gegebenen $\zeta$ für jedes hinreichend große $L$ durch ein $\zeta'$ lösbar, das (5) erfüllt; also für dieses $\zeta'$ auch (6) durch solche Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}$ lösbar, daß (4) bis auf den Fall $\nu = k$ erfüllt ist. Wird nun $\lambda_k$ durch

$$\lambda_k a_k = \tau\zeta - \tau'\zeta' \tag{7}$$

bestimmt, so ist $\lambda_k$ ganz,

$$\tau\zeta = a_k\lambda_k + \tau'\zeta' = a_k\lambda_k + \ldots + a_1\lambda_1$$

und schließlich, wenn $\zeta$ bei

$$h = \frac{j_k + J_k}{2\tau}a_k, \qquad H = \frac{J_k}{\tau}a_k \tag{8}$$

n Ungleichungen (3) genügt, (4) auch für $\nu = k$ erfüllt, da für jedes nreichend große $L$ wegen (7), (3), (8)

$$j_k L^k < \frac{1}{2}(j_k + J_k) L^k - \frac{\tau' H'}{a_k} L^{k-1} < \lambda_k < \frac{\tau\zeta}{a_k} < J_k L^k$$

.

Hilfssatz 3. *Es seien $B, P_1, \ldots, P_K$ gegebene natürliche Zahlen und*

)
$$(P_1, \ldots, P_K) = 1.$$

*ann gibt es unabhängig von $K$ und den $P_\mu$ eine solche natürliche Zahl*[5]) *$(B)$, daß sich*

0)
$$(u_1 P_1 + \ldots + u_K P_K, B) = 1$$

*rch ganze Zahlen $u_1, \ldots, u_K$ erfüllen läßt, die sämtlich $\geqq 0$ und $U$ sind.*

Beweis. Unbeschadet der Allgemeinheit kann $B$ als quadratfrei annommen werden, etwa $B = p_1 \cdots p_\varrho$. Der Beweis wird durch Schluß on $\varrho - 1$ auf $\varrho$ geführt.

a) $\varrho = 1$. Die Zahl $p_1$ geht wegen (9) nicht in allen $P_\mu$ auf; u. d. A. $p_1 \nmid P_1$. Dann gilt (10) mit $u_1 = 1$, $u_2 = \ldots = u_K = 0$.

b) Die Behauptung sei richtig für $\varrho - 1$; d. h. es gebe ein $= V(p_1, \ldots, p_{\varrho-1})$, so daß für passend gewählte nichtnegative $v_\mu \leqq V$ nd für $q = p_1 \cdots p_{\varrho-1}$

1)
$$(v_1 P_1 + \ldots + v_K P_K, q) = 1$$

t. Die Zahl $p_\varrho$ geht nicht in allen $P_\mu$ auf; u. d. A. $p_\varrho \nmid P_1$. Wird $v'$ eich einer passenden der Zahlen 0, 1 gesetzt, so ist

$$(v_1 + v'q) P_1 + v_2 P_2 + \ldots + v_K P_K \not\equiv 0 \pmod{p_\varrho},$$

so für $u_1 = v_1 + v'q$, $u_2 = v_2, \ldots, u_K = v_K$

$$(u_1 P_1 + \ldots + u_K P_K, p_\varrho) = 1.$$

a aber die Addition eines Vielfachen von $q$ zu $v_1$ an der Richtigkeit on (11) nichts ändert, ist zugleich

$$(u_1 P_1 + \ldots + u_K P_K, q) = 1,$$

so (10) mit $U(B) = V + q$ erfüllt.

Beweis des Satzes. Unbeschadet der Allgemeinheit darf angeommen werden:

a) $k \geqq 2$; klar.

b) $(a_k, \ldots, a_1) = 1$; klar. Daraus folgt (vgl. Fußnote 3) $T \mid k!$.

---

[5]) Z. B. $U = \varrho B$. wenn $\varrho$ die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von $B$ ist.

c) *Alle Koeffizienten von $P(z)$ sind positiv.* Denn es sei der Satz für alle $P(z)$ bewiesen, die statt $a_k > 0$ diese schärfere Bedingung erfüllen. Ist $Q(y) = b_k y^k + \ldots + b_1 y$ ein Polynom, bei dem außer $(b_k, \ldots, b_1) = 1$ nur $b_k > 0$ feststeht, so gibt es eine solche ganze Zahl $w > 0$, daß in $\overline{P}(z) = Q(z + k!\, w) = a_k z^k + \ldots + a_0$ alle Koeffizienten $> 0$ sind. Da offenbar auch $(a_k, \ldots, a_1) = 1$ ist, ist $P(z) = \overline{P}(z) - a_0$ eins der Polynome, für die der Satz als bewiesen angenommen wird. Der größte gemeinsame Teiler aller Werte von $Q(y)$ ist, da er nach b) in $k!$ aufgeht und $k! \mid a_0$ ist, derselbe wie der der Polynomwerte $P(z)$, d. h. $T$. Daher ist für alle hinreichend großen $Z$

$$TZ = T\left(Z - s\frac{a_0}{T}\right) + s a_0 = \sum_{\varkappa=1}^{s} \{P(z_\varkappa) + a_0\} = \sum_{\varkappa=1}^{s} Q(y_\varkappa)$$

mit $Q(y_\varkappa) > 0$ (da $a_0 > 0$ und $P(z_\varkappa) \geqq 0$); d. i. der zu beweisende Satz.

Nach Hilfssatz 1 ist für jedes $L > L_0$ und je $k$ natürliche Zahlen $\lambda_\nu$, die (1) erfüllen, (2) lösbar, also

$$A(a_k \lambda_k + \ldots + a_1 \lambda_1) = \sum_{\varkappa=1}^{N} P(x_\varkappa) \tag{12}$$

mit ganzen $x_\varkappa \geqq 0$, also $P(x_\varkappa) \geqq 0$. Nach Hilfssatz 2, $\tau = 1$ gesetzt wegen b), ist die Gleichung

$$\zeta = a_k \lambda_k + \ldots + a_1 \lambda_1 \tag{13}$$

unter Erfüllung von (4), d. h. (1) lösbar, wenn $L$ hinreichend groß und $\zeta$ die Ungleichungen

$$h L^k < \zeta < H L^k \tag{3}$$

erfüllt. Da für jedes hinreichend große $\zeta$ sich ein im Sinne des Hilfssatzes 2 hinreichend großes $L$ so finden läßt, daß (3) richtig ist, folgt aus (12) und (13) für jedes hinreichend große $\zeta$

$$A\zeta = \sum_{\varkappa=1}^{N} P(x_\varkappa). \tag{14}$$

Nach Fußnote 3 ist für $K = k!$

$$T = (P(1), \ldots, P(K)).$$

Nach Hilfssatz 3, auf $P_\mu = \frac{P(\mu)}{T}$ und die offenbar ganze Zahl $B = \frac{A}{T}$ angewendet, gibt es $U(B)$, so daß (10), d. h.

$$(u_1 P(1) + \ldots + u_K P(K), A) = T$$

ch ganze nichtnegative Zahlen $u_\mu \leqq U(B)$, also $u_\mu \leqq W$ lösbar ist, $W = U(1) + \ldots + U(A)$ nur von $k$ abhängt, nicht von den Koeffi-ten des Polynoms. Für $w = 1, \ldots, A$ durchläuft also

$$w\{u_1 P(1) + \ldots + u_K P(K)\}$$

tliche Restklassen mod. $A$ der durch $T$ teilbaren Zahlen mindestens nal.

Ist $Z$ eine hinreichend große Zahl, so gibt es daher nichtnegative len $w, u_1, \ldots, u_K$, die sämtlich unterhalb einer nur von $k$ abhängigen ranke liegen und für die

$$A \mid TZ - w\{u_1 P(1) + \ldots + u_K P(K)\} = A\zeta$$

Diese Zahl $A\zeta$ ist dann in der Gestalt (14) darstellbar, also

$$TZ = w\{u_1 P(1) + \ldots + u_K P(K)\} + \sum_{\varkappa=1}^{N} P(x_\varkappa) = \sum_{\varkappa=1}^{s} P(z_\varkappa),$$

da im Bedarfsfalle $0 = P(0)$ hinzugefügt werden durfte.

$$s = AKW + N$$

und nur von $k$ abhängt.

Anmerkungen. 1. Im Falle $P(z) = z^k - z$ ist bekanntlich[6]) $T$ ch dem Produkt $\Pi$ der Primzahlen $p$, für die $p - 1 \mid k - 1$. Im Falle $z) = az^k + bz$ ist $T \mid (a, b)\Pi$, da[6]) in dem Kernsatz, also im Hilfs- 1 bei Beschränkung auf $\nu = 1$, $k$ (statt $\nu = 1, \ldots, k$), also auch in ), $A = \Pi$ gewählt werden kann.

2. Der Satz gilt wiederum auch dann, wenn die $a_\nu$ *rationale* Zahlen , jedoch $P(z)$ für jedes ganze $z$ ganz ist. Denn er gilt, wenn $a$ der ıptnenner der $a_\nu$ ist, wie bewiesen, für $aP(z)$; d. h. es ist

$$aTZ = \sum_{\varkappa=1}^{s} aP(z_\varkappa), \quad \text{also} \quad TZ = \sum_{\varkappa=1}^{s} P(z_\varkappa).$$

3. Der Satz gilt in der angegebenen Form nicht, wenn $P(z)$ ein stantes Glied $a_0$ enthalten darf (die Annahme, daß er gilt, führt für $) = 2sz^k + 1$ zu einem Widerspruch sowohl für $T$ gleich dem größten einsamen Teiler der Werte $P(z)$ wie für $T$ gleich dem größten gemein-en Teiler der Werte $P(z) - a_0$). Dagegen behält er seine Richtigkeit, n $T$ der größte gemeinsame Teiler aller Werte $P(z) - a_0$ ist und darzustellende Zahlen nicht die durch $T$ teilbaren Zahlen, sondern die

[6]) Vgl. Kamke, *Über die simultane Zerfällung ganzer Zahlen in 1-te und n-te ıtzen* [Journal f. d. reine u. angew. Mathem. **152**, S. 30–32].

einer passend gewählten Restklasse mod. $T$ genommen werden. Denn b
hinreichend großem ganzen $w$ erfüllt $\overline{P}(z) = P(z + k!w) - P(k!w)$ d
Bedingungen des Satzes, liefert denselben größten gemeinsamen Teiler
wie $P(z) - a_0$, und ist $P(k!w) > 0$; daher ist für alle großen $Z$

$$TZ + s\,P(k!w) = \sum_{\varkappa=1}^{s} \{\overline{P}(z_\varkappa) + P(k!w)\} = \sum_{\varkappa=1}^{s} P(z_\varkappa + k!w)$$

mit $P(z + k!w) > 0$. Hieraus folgt unmittelbar, daß der in dieser Arbe
bewiesene Satz den früheren enthält.

Hagen i. W., 3. September 1921.

(Eingegangen am 6. September 1921.)

# Über die Schwingungen eingespannter Platten.

Von

R. Courant in Göttingen.

Im 7. Bande dieser Zeitschrift habe ich als Anwendung allgemeiner
ze über die Differentialgleichungen der mathematischsn Physik das
*mptotische Verteilungsgesetz für die Eigenwerte* von Differentialglei-
ngen zweiter Ordnung hergeleitet[1]); die Herleitung beruhte wesentlich
auf, daß man das Eigenwertproblem der gewöhnlichen Schwingungs-
chung bei Rechtecken bzw. Rechtflachen explizit beherrscht und daß
n jeden Bereich aus solchen Bausteinen zusammensetzen kann. Eine
nittelbare Übertragung auf Differentialgleichungen vierter Ordnung
eitert daran, daß man hier die Eigenfunktionen der einfachsten Diffe-
tialgleichung

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \lambda u \equiv \Delta\Delta u + \lambda u = 0$$

ein Rechteck usw. bei den in Betracht zu ziehenden Randbedingungen
neswegs explizit kennt. Ich möchte nun in der vorliegenden Arbeit
en, wie man trotzdem bei Differentialgleichungen vierter Ordnung zu
n Gesetz der asymptotischen Eigenwertverteilung gelangen kann, und
r will ich als einfachsten und typischen Fall das Eigenwertproblem
andeln, welches zu dem physikalischen Problem der *Schwingungen*
*espannter Platten* gehört.

Es sei $G$ ein Gebiet der $xy$-Ebene vom Flächeninhalt $F$, begrenzt
einer endlichen Anzahl von Kurvenstücken mit stetiger Tangente.
ucht sind diejenigen Konstanten $\lambda$, für welche die Differentialgleichung

[1]) Über die Eigenwerte bei den Differentialgleichungen der mathematischen
sik. Math. Zeitschr. 7 (1920), S. 1—57

(1) eine in $G$ reguläre, nicht identisch verschwindende Lösung besit
welche auf dem Rande $R$ den Bedingungen

$$u = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \tag{3}$$

genügt, unter $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ die normale Ableitung von $u$ verstanden.

Die Eigenwerte $\lambda$ sind im wesentlichen die Biquadrate der Schwi
gungszahlen bei dem physikalischen Problem; nach wachsender Größe g
ordnet mögen sie mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ bezeichnet werden, während die z
gehörigen Eigenfunktionen $u_1, u_2, u_3, \ldots$ heißen. Dann kann man anal
wie in der oben zitierten Abhandlung $\lambda_n$ und $u_n$ folgendermaßen definiere
Es seien $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ stetige Funktionen in $G$, es sei ferner $\varphi$ eine m
stetigen Ableitungen bis zur zweiten und stückweise stetigen Ableitung
bis zur vierten Ordnung in $G$ versehene Funktion, welche den Bedingung

$$\iint_{(G)} \varphi^2 \, dx\, dy = 1, \tag{4}$$

$$\iint_{(G)} \varphi v_i \, dx\, dy = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{5}$$

sowie den Randbedingungen

$$\varphi = 0, \tag{2a}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0 \tag{3a}$$

genügt; es sei schließlich $h\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$ das Minimum bzw. di
untere Grenze des Integrals

$$H[\varphi] = \iint_{(G)} (\Delta \varphi)^2 \, dx\, dy,$$

wenn $\varphi$ den angegebenen Konkurrenzbedingungen unterworfen ist. Dan
ist $\lambda_n$ der größte Wert, welchen $h\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$ bei Variation de
Funktionen $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ annehmen kann. Der Maximum-Minimumwert $\lambda$
wird erreicht für $v_1 = u_1, \ldots, v_{n-1} = u_{n-1}$; $\varphi_n = u_n$.

Aus dieser Eigenschaft folgt fast unmittelbar, ebenso wie früher[2]
der folgende

Satz. *Verstehen wir unter $G_1, G_2, G_3, \ldots$ eine Reihe von Teilgebiete
des Gebietes $G$, von denen kein Paar innere Punkte gemein hat, bezeichne
wir ferner mit $A(\lambda)$ die Anzahl der unterhalb einer Schranke $\lambda$ gelegene
Eigenwerte der Differentialgleichung* (1) *bei den Randbedingungen* (2), (3

[2]) Loc. cit. S. 22.

*das Gebiet $G$ und mit $A_1(\lambda), A_2(\lambda), \ldots$ die entsprechenden Anzahlen die Teilgebiete $G_1, G_2, \ldots$ bei denselben Randbedingungen, dann gilt*

$$A(\lambda) \geqq A_1(\lambda) + A_2(\lambda) + \ldots .$$

Explizit bekannt sind uns die Eigenwerte und Eigenfunktionen eres Problems für den Kreis. Ist $K$ ein Kreis vom Radius 1 mit zugehörigen Polarkoordinaten $r, \vartheta$, so werden bekanntlich die Eigenktionen durch Ausdrücke der Form

$$[J_n(k_{n,m} r) + t J_n(i k_{n,m} r)]\, e^{in\vartheta} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

geben, wobei die Größen $t$ und $k_{n,m}$ aus den Randbedingungen

$$J_n(k) + t J_n(ik) = 0$$
$$J_n'(k) + it J_n'(ik) = 0$$

bestimmen sind und $J_n$ die $n$-te Besselsche Funktion bedeutet. Für $k_{n,m}$ gilt somit die transzendente Gleichung

$$\Phi(k) \equiv \frac{J_n'(k)}{J_n(k)} - i\frac{J_n'(ik)}{J_n(ik)} = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

d $k^4 = \lambda$ ist der zugehörige doppelt zu rechnende Eigenwert.

Wir wollen zunächst die Anzahl $N(\mu)$ der unterhalb einer Schranke $\mu$ egenen positiven Wurzeln $k_{n,m}$ dieser Gleichung nach unten abschätzen. ssen wir in der Funktion $\Phi$ die positive Größe $k$ beständig wachsen, so wird erste Summand von positiven zu negativen unendlich großen Werten überen, wenn $k$ das Intervall zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen $J_n(k)$ durchläuft, der zweite Summand bleibt dabei reell und beschränkt, $J_n(ik)$ für positive Werte von $k$ nicht verschwinden kann, wie unmittelbar aus der Reihenentwicklung

$$J_n(ik) = \frac{i^n k^n}{2^n n!}\left\{1 + \frac{k^2}{2\cdot(2n+2)} + \frac{k^4}{2\cdot 4\cdot(2n+2)(2n+4)} + \ldots\right\}$$

t. Ist also $N_n(\mu)$ die Anzahl der unterhalb $\mu$ gelegenen positiven rzeln von (7) bei festem $n$ und ist $M_n(\mu)$ die entsprechende Anzahl positiven Nullstellen von $J_n(k)$, so gilt jedenfalls, da für $n > 0$ auch = 0 eine Unendlichkeitsstelle des ersten Summanden von (7) ist,

$$N_n(\mu) \geqq M_n(\mu), \qquad N_0(\mu) \geqq M_0(\mu) - 1$$

somit, wenn über alle $n$ summiert wird,

$$N(\mu) \geqq M(\mu) - 1,$$

ei unter $M(\mu)$ die gesamte Anzahl aller unterhalb $\mu$ gelegenen

positiven Nullstellen von Besselschen Funktionen mit ganzzahlige positiven Index verstanden wird.

Die Anzahl $M(\mu)$ ist für große $\mu$ asymptotisch bekannt, sei es a den üblichen asymptotischen Entwicklungen, sei es als die halbe[3]) Anza der unterhalb $\mu^2$ gelegenen Eigenwerte einer kreisförmigen eingespannt Membran vom Radius 1, und zwar gilt[4])

$$M(\mu) \cong \frac{1}{8}\mu^2. \tag{9}$$

Hat der Kreis den Radius $a$, so wird entsprechend

$$M_a(\mu) \cong \frac{1}{8}a^2\mu^2 \cong a^2 M(\mu). \tag{10}$$

Hierbei ist das Zeichen $\cong$ in der gebräuchlichen Weise für asymptotisch Gleichheit bei großem $\mu$ benutzt.

Nunmehr können wir dem obigen Satze zufolge *für die Zahl* $A(\lambda)$ *leicht eine asymptotische untere Schranke* bestimmen; wir wählen z diesem Zwecke als Gebiete $G_1, G_2, G_3, \ldots$ eine endliche Anzahl von Kreise mit den Radien $a_1, a_2, a_3, \ldots$ und bestimmen, was stets möglich ist, dies Kreise so, daß ihr Gesamtflächeninhalt $f = \pi(a_1^2 + a_2^2 + \ldots)$ sich vo Inhalt $F$ des Gebietes $G$ um weniger als eine beliebig kleine vorgegeben positive Zahl $\varepsilon$ unterscheidet; sodann wird, wenn wir die Formel (10) au jeden dieser Kreise anwenden und $\lambda = \mu^4$ setzen, in leicht verständliche Bezeichnung

$$A_i(\lambda) = 2N_{a_i}(\sqrt[4]{\lambda}) \geqq 2M_{a_i}(\sqrt[4]{\lambda}) \cong \frac{1}{4}a_i^2\sqrt{\lambda}, \tag{11}$$

mithin

$$A(\lambda) \gtrsim \frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi} f \geqq \frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi}(F - \varepsilon)$$

und, da hierbei $\varepsilon$ beliebig klein genommen werden kann,

$$A(\lambda) \gtrsim \frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi} F. \tag{12}$$

Um eine *obere asymptotische Schranke für* $A(\lambda)$ zu erhalten, schlage wir einen ganz anderen Weg ein. Wenn wir in dem Variationsproblem durch welches $\lambda_n$ definiert ist, die Randbedingung (3a) als Forderung fü die zur Konkurrenz zugelassenen Funktionen $\varphi$ fortlassen, so wird jeden

[3]) Jeder dieser Eigenwerte, abgesehen vom ersten, ist zweifach.
[4]) Loc. cit. S. 43.

s der einzelne Wert $h\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$ nicht vergrößert, dasselbe gilt für das bei Variation der $v_1, \ldots, v_{n-1}$ entspringende Maximum $\sigma_n$ er Werte, es ist also

$$\sigma_n \leqq \lambda_n.$$

ı ist infolge der Greenschen Formel, der Schwarzschen Ungleichung der Beziehung (4), falls wir zur Abkürzung

$$D[\varphi] = \iint_{(G)} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\, dy$$

en,

$$(D[\varphi])^2 = \left\{ \iint_{(G)} \varphi\, \Delta\varphi\, dx\, dy \right\}^2 \leqq \iint_{(G)} \varphi^2\, dx\, dy \cdot \iint_{(G)} (\Delta\varphi)^2\, dx\, dy,$$

$$(D[\varphi])^2 \leqq H[\varphi].$$

Es ist somit, wenn wir mit $d\{v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}\}$ analog wie oben die ere Grenze des Integrales $D[\varphi]$ bezeichnen, wobei für $\varphi$ alle eben ennzeichneten Funktionen zugelassen werden,

$$(d\{v_1, \ldots, v_{n-1}\})^2 \leqq h\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}.$$

glich gilt diese Beziehung auch für die Maxima dieser unteren Grenzen. ı ist das Maximum von $d$ gleich dem $n$-ten Eigenwert $\varrho_n$ der eingespannten nbran, d. h. gleich dem $n$-ten Eigenwert der Differentialgleichung

$$\Delta u + \varrho u = 0$$

$G$ bei der Randbedingung $u = 0$. Also wird $\lambda_n \geqq \sigma_n \geqq \varrho_n^2$. Daher $A(\lambda)$ nicht größer als die Anzahl der Werte $\varrho_n^2$, welche unterhalb $\lambda$ en. Nun ist, unter $B(\varrho)$ die Anzahl der Werte $\varrho_n$ unterhalb $\varrho$ ver- den, gemäß der oben zitierten Arbeit

$$B(\varrho) \cong \frac{F}{4\pi} \varrho$$

daher wird

$$A(\lambda) \lesseqgtr \frac{F}{4\pi} \sqrt{\lambda}.$$

mehr folgt aus dieser Beziehung in Verbindung mit (12) die nptotische Gleichung

$$\boxed{A(\lambda) \cong \frac{F}{4\pi} \sqrt{\lambda}}$$

$$\boxed{\lambda_n \cong \left(\frac{n \cdot 4\pi}{F}\right)^2}.$$

Wir können dieses Schlußresultat auch folgendermaßen formuliere

*Der n-te Eigenwert der eingespannten Platte ist mit wachsendem asymptotisch gleich dem Quadrate des n-ten Eigenwertes der eingespannt Membran.*

Für das entsprechende Problem bei drei oder mehr Dimensionen g das analoge Resultat und die analoge Beweismethode.

Insbesondere besagt unser Resultat, *daß auch beim Problem d schwingenden Platte die asymptotische Eigenwertverteilung ebenso w bei dem der Membran nur vom Inhalt, nicht aber von der Gestalt d Grundgebietes G abhängt.*

(Eingegangen am 22. September 1921.)

# Über zwei Sätze des Herrn G. H. Hardy.

Von

Harald Cramér in Stockholm.

Zwei der interessantesten Funktionen der analytischen Zahlentheorie, e besonders in der neuesten Zeit vielfach behandelt wurden, sind die Funknen $D(x)$ und $R(x)$, welche in folgender Weise erklärt sind: Es bezeichne $n$) die Anzahl der Teiler der positiven ganzen Zahl $n$, $r(n)$ die Anzahl er Zerlegungen in zwei Quadrate; dann setzen wir für $x > 0$

$$D(x) = \sum_{n \leqq x} d(n), \qquad R(x) = \sum_{n \leqq x} r(n).$$

e beiden Funktionen lassen sich bekanntlich auch in einfacher Weise Gitterpunktanzahlen interpretieren. Die Hauptglieder der Funktionen r große Werte von $x$ sind schon lange[1]) bekannt, sie gehen aus den rmeln

$$D(x) = x \log x + (2C - 1)x + \Delta(x),$$
$$R(x) = \pi x + P(x)$$

rvor. Hier bedeutet $C$ die Eulersche Konstante, und die Größenhnung der beiden Restglieder $P(x)$ und $\Delta(x)$ ist jedenfalls kleiner als e der Hauptglieder. Die wirkliche Größenordnung dieser Restglieder zu den, ist aber eins der schwierigsten noch ungelösten Probleme der anaischen Zahlentheorie. In dieser Hinsicht ist bewiesen[2]), daß

[1]) Vgl. Gauß, De nexu inter multitudinem classium etc., Werke 2, S. 269 d Dirichlet, Über die Bestimmung der mittleren Werte in der Zahlentheorie, rke 2, S. 51.

[2]) Vgl. G. H. Hardy, On the expression of a number as the sum of two ares, Quarterly Journal of Mathematics **46** (1915), S. 263—283, und On Dirichlet's isor problem, Proc. Lond. Math. Soc. (2) **15** (1916), S. 1—25. In diesen Arbeiten det man zahlreiche Angaben über die Literatur unserer Probleme.

$$(1)\qquad \begin{cases} \Delta(x) = O(x^{\frac{1}{3}}\log x), \\ P(x) = O(x^{\frac{1}{3}}) \end{cases}$$

und

$$(2)\qquad \begin{cases} \Delta(x) \neq o(x^{\frac{1}{4}}(\log x)^{\frac{1}{4}}\log\log x), \\ P(x) \neq o(x^{\frac{1}{4}}(\log x)^{\frac{1}{4}}) \end{cases}$$

gilt. Bezeichnet also $\varkappa$ die untere Grenze der Zahlen $k$, für welche z. B. $\Delta(x) = O(x^k)$ ist, so muß $\frac{1}{4} \leqq \varkappa \leqq \frac{1}{3}$ sein; mehr weiß man nicht über $\varkappa$. Dagegen hat Hardy[3]) bewiesen, daß *die Mittelwerte* der beiden Restglieder von einer $x^{\frac{1}{4}}$ nicht wesentlich übersteigenden Größenordnung sind, es gilt nämlich für jedes $\varepsilon > 0$

$$(3)\qquad \begin{cases} \frac{1}{x}\int_1^x |\Delta(t)|\,dt = O(x^{\frac{1}{4}+\varepsilon}), \\ \frac{1}{x}\int_1^x |P(t)|\,dt = O(x^{\frac{1}{4}+\varepsilon}). \end{cases}$$

Diese Resultate ergeben sich mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung als unmittelbare Folgerungen aus

$$(4)\qquad \begin{cases} \int_1^x (\Delta(t))^2\,dt = O(x^{\frac{3}{2}+\varepsilon}), \\ \int_1^x (P(t))^2\,dt = O(x^{\frac{3}{2}+\varepsilon}). \end{cases}$$

Ich werde im folgenden einen neuen, kürzeren Beweis der beiden durch (3) oder (4) ausgedrückten Hardyschen Sätze mitteilen und dieselben gleichzeitig auch verschärfen. Es wird sich nämlich ergeben, daß (4) durch

$$(5)\qquad \begin{cases} \int_1^x (\Delta(t))^2\,dt = \alpha x^{\frac{3}{2}} + O(x^{\frac{1}{4}+\varepsilon}), \\ \int_1^x (P(t))^2\,dt = \beta x^{\frac{3}{2}} + O(x^{\frac{1}{4}+\varepsilon}) \end{cases}$$

[3]) The average order of the arithmetical functions $P(x)$ and $\Delta(x)$, Proc. Lond. Math. Soc. (2) **15** (1916), S. 192—213, und Additional note on two problems in the analytic theory of numbers, Ebenda (2) **18** (1918), S. 201—204.

t konstanten $\alpha$ und $\beta$ ersetzt werden kann. Übrigens ist[4])

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{6\pi^2} \sum_1^\infty \left( \frac{d(n)}{n^{\frac{3}{4}}} \right)^2, \\ \beta = \frac{1}{3\pi^2} \sum_1^\infty \left( \frac{r(n)}{n^{\frac{3}{4}}} \right)^2, \end{cases}$$

s mit den für nicht ganzzahlige $x$ geltenden Formeln[2])

$$\Delta(x) = \frac{x^{\frac{1}{4}}}{\pi\sqrt{2}} \sum_1^\infty \frac{d(n)}{n^{\frac{3}{4}}} \cos\left(4\pi\sqrt{nx} - \frac{1}{4}\pi\right) + O(1),$$

$$P(x) = \frac{x^{\frac{1}{4}}}{\pi} \sum_1^\infty \frac{r(n)}{n^{\frac{3}{4}}} \sin\left(2\pi\sqrt{nx} - \frac{1}{4}\pi\right) + O(1)$$

einem gewissen Einklang steht. Hierdurch wird natürlich auch (3) zu

$$\begin{cases} \frac{1}{x}\int_1^x |\Delta(t)|\,dt = O(x^{\frac{1}{4}}) \\ \frac{1}{x}\int_1^x |P(t)|\,dt = O(x^{\frac{1}{4}}) \end{cases}$$

rschärft. Es ist interessant, dieses Resultat mit (2) zu vergleichen.

Die Beweise der beiden durch (5) ausgedrückten Sätze verlaufen hr analog, und ich werde daher nur den Beweis des Satzes über $P(x)$ llständig entwickeln, um dann einige kurze Andeutungen über $\Delta(x)$ geben.

## § 1.

Ich gehe von der leicht beweisbaren[5]) Gleichung

$$\int_0^t R(u)\,du = \frac{\pi}{2}t^2 - t + \frac{1}{\pi}\sum_1^\infty \frac{r(n)}{n}\, t J_2(2\pi\sqrt{nt})$$

s und erhalte unmittelbar, wenn noch allgemein

$$\delta f(x) = f(x+1) - f(x)$$

---

[4]) Die Konstante $\alpha$ kann auch durch die Riemannsche Zetafunktion ausgedrückt rden. Man hat nämlich $\alpha = \frac{\zeta^4\left(\frac{3}{2}\right)}{6\pi^2\zeta(3)}$.

[5]) Vgl. E. Landau, Über die Gitterpunkte in einem Kreise. Math. Zeitschr. 5 919), S. 319—320. Das dortige $A(x)$ ist gleich $R(x)+1$.

gesetzt wird,

$$\int_t^{t+1} R(u)\,du = \pi t + \frac{1}{\pi}\sum_1^{\infty}{}' \frac{r(n)}{n}\,\delta t\, J_2(2\pi\sqrt{nt}) + O(1).$$

Nun ist aber

$$\int_t^{t+1} R(u)\,du = R(t) + \int_t^{t+1} [R(u) - R(t)]\,dt,$$

also wegen $r(n) = O(n^{\varepsilon})$

$$\int_t^{t+1} R(u)\,du = \pi t + P(t) + O(t^{\varepsilon})$$

für beliebig kleines $\varepsilon > 0$. Hieraus folgt

$$P(t) = \frac{1}{\pi}\sum_1^{x}{}' \frac{r(n)}{n}\,\delta t\, J_2(2\pi\sqrt{nt}) + O(t^{\varepsilon}),$$

und, wenn jetzt die asymptotische Entwicklung der Besselschen Funktion in der Gestalt

$$J_2(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) + \frac{15}{8}\sqrt{\frac{2}{\pi x^3}}\sin\left(x - \frac{1}{4}\pi\right) + O(x^{-\frac{5}{2}})$$

eingeführt wird,

$$P(t) = -\frac{1}{\pi^2}\sum_1^{x}{}' \frac{r(n)}{n^{\frac{3}{4}}}\,\delta t^{\frac{3}{4}}\cos\left(2\pi\sqrt{nt} - \frac{1}{4}\pi\right)$$

$$+ \frac{15}{16\pi^3}\sum_1^{x}{}' \frac{r(n)}{n^{\frac{5}{4}}}\,\delta t^{\frac{1}{4}}\sin\left(2\pi\sqrt{nt} - \frac{1}{4}\pi\right) + O(t^{\varepsilon}),$$

In dieser Gleichung ist aber die zweite Summe rechts von der Form $O(t^{\varepsilon})$, denn es gilt

$$\delta t^{\frac{1}{4}}\sin\left(2\pi\sqrt{nt} - \frac{1}{4}\pi\right) = \int_t^{t+1} \frac{d}{dv}v^{\frac{1}{4}}\sin\left(2\pi\sqrt{nv} - \frac{1}{4}\pi\right)dv = O\left(n^{\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{4}}\right);$$

wir haben also

$$P(t) = -\frac{1}{\pi^2}\sum_1^{x}{}' \frac{r(n)}{n^{\frac{3}{4}}}\,\delta t^{\frac{3}{4}}\cos\left(2\pi\sqrt{nt} - \frac{1}{4}\pi\right) + O(t^{\varepsilon}) = P_1(t) + O(t^{\varepsilon}).$$

Hieraus folgt nun

$$(9)\qquad \int_1^x (P(t))^2\,dt = \int_1^x (P_1(t))^2\,dt + \int_1^x (P_1(t))\cdot O(t^{\varepsilon})\,dt + O(x^{1+\varepsilon}),$$

0) $$\int_1^x (P_1(t))^2 dt$$

$$\frac{1}{\pi^4}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r(m)\,r(n)}{(mn)^{\frac{5}{4}}}\int_1^x \delta t^{\frac{3}{4}}\cos\left(2\pi\sqrt{mt}-\frac{1}{4}\pi\right)\cdot\delta t^{\frac{3}{4}}\cos\left(2\pi\sqrt{nt}-\frac{1}{4}\pi\right)dt$$

lt. Wir wollen zuerst beweisen, daß in der hier auftretenden Doppel-ihe die Summe aller Glieder mit $m \neq n$ von der Form $O(x^{\frac{5}{4}+\varepsilon})$ ist. Es nügt natürlich, nur die Glieder mit $m > n$ zu betrachten. Schreiben wir

$$\delta_m(t) = \delta t^{\frac{3}{4}}\cos\left(2\pi\sqrt{mt}-\frac{1}{4}\pi\right) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}\pi i}\delta t^{\frac{3}{4}}e^{2\pi i\sqrt{mt}} + \frac{1}{2}e^{\frac{1}{4}\pi i}\delta t^{\frac{3}{4}}e^{-2\pi i\sqrt{mt}},$$

folgt

1) $$\delta_m(t)\,\delta_n(t) = \frac{1}{2}\Re\left(e^{-\frac{1}{2}\pi i}\cdot\delta t^{\frac{3}{4}}e^{2\pi i\sqrt{mt}}\cdot\delta t^{\frac{3}{4}}e^{2\pi i\sqrt{nt}}\right) + \frac{1}{2}\Re\left(\delta t^{\frac{3}{4}}e^{2\pi i\sqrt{mt}}\cdot\delta t^{\frac{3}{4}}e^{-2\pi i\sqrt{nt}}\right),$$

d hieraus

2) $$\left|\int_1^x \delta_m(t)\,\delta_n(t)\,dt\right| < \left|\int_1^x \delta t^{\frac{3}{4}}e^{2\pi i\sqrt{mt}}\cdot\delta t^{\frac{3}{4}}e^{2\pi i\sqrt{nt}}dt\right| + \left|\int_1^x \delta t^{\frac{3}{4}}e^{2\pi i\sqrt{mt}}\cdot\delta t^{\frac{3}{4}}e^{-2\pi i\sqrt{nt}}\delta t\right|.$$

Das zweite Glied rechts in (12) ist nun für $m > n$ gleich

3) $$\left|\int_1^x F(t)\,d\,\frac{e^{2\pi i(\sqrt{m}-\sqrt{n})\sqrt{t}}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}\right| < \frac{|F(x)|+|F(1)|+\int_1^x |F'(t)|\,dt}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}.$$

$$F(t) = \frac{t^2}{\pi i}\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\frac{3}{4}}e^{2\pi i\sqrt{m}(\sqrt{t+1}-\sqrt{t})}-1\right]\cdot\left[\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\frac{3}{4}}e^{-2\pi i\sqrt{n}(\sqrt{t+1}-\sqrt{t})}-1\right]$$

$$= \frac{t^2}{\pi i}F_1(t)\,F_2(t).$$

Durch einfache Rechnung ergibt sich für $t \geqq 1$

$$|F_1(t)| < \begin{cases} 3, \\ 8\,m^{\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$|F_1'(t)| < 5\,m^{\frac{1}{2}}t^{-\frac{3}{2}}$$

und analoge Ungleichungen für $F_2(t)$ und $F_3(t)$, also folgt aus (14)

$$|F(t)| < \begin{cases} \frac{t^2}{\pi} \cdot 3 \cdot 3 & < 3t^2 \\ \frac{t^2}{\pi} \cdot 8m^{\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}} \cdot 8n^{\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}} & < 22\,tm^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$|F'(t)| < \begin{cases} \frac{2t}{\pi} \cdot 3 \cdot 3 + \frac{t^2}{\pi} \cdot 15\,t^{-\frac{3}{2}}(m^{\frac{1}{2}} + n^{\frac{1}{2}}) < 6t + 10\,t^{\frac{1}{2}}m^{\frac{1}{2}} \\ \frac{2t}{\pi} \cdot 8m^{\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}} \cdot 8n^{\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}} + \frac{t^2}{\pi} \cdot 8m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{2}}t^{-2} < 70\,m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Durch Einführung von diesen Ausdrücken in (13) ergeben sich für das zweite Glied rechts in (12) die beiden Majoranten

$$(15) \qquad \frac{7x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x}+\sqrt{m})}{\sqrt{m}-\sqrt{n}} \quad \text{und} \quad \frac{120\,x\sqrt{mn}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}.$$

Das erste Glied rechts in (12) läßt sich natürlich genau ebenso behandeln, jedoch tritt hier der Nenner $\sqrt{m}+\sqrt{n}$ auf, so daß die Abschätzung auch für Glieder mit $m = n$ brauchbar ist. Schließlich finden wir also für $m > n$

$$(16) \qquad \left|\int_1^x \delta_m(t)\,\delta_n(t)\,dt\right| < \begin{cases} \frac{14x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x}+\sqrt{m})}{\sqrt{m}-\sqrt{n}} \\ \frac{240\,x\sqrt{mn}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}. \end{cases}$$

Die Glieder mit $m > n$ in der Doppelsumme in (10) zerlegen wir nun in zwei Teile, indem wir schreiben

$$s_1 = \sum_{m \leqq x} \sum_{n<m}{}' \frac{r(m)\,r(n)}{(mn)^{\frac{5}{4}}} \int_1^x \delta_m(t)\,\delta_n(t)\,dt,$$

$$s_2 = \sum_{m > x} \sum_{n<m}{}' \frac{r(m)\,r(n)}{(mn)^{\frac{5}{4}}} \int_1^x \delta_m(t)\,\delta_n(t)\,dt.$$

Durch Anwendung von (16) erhalten wir für beliebig kleines $\varepsilon > 0$ (wir nehmen insbesondere $\varepsilon < \frac{1}{4}$ an)

$$s_1 = O\left(\sum_{m \leqq x} \sum_{n<m}{}' (mn)^{-\frac{5}{4}+\varepsilon} \frac{x\sqrt{mn}}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}\right) = O\left(x \sum_{m \leqq x} m^{-\frac{3}{4}+\varepsilon} \sum_{n<m}{}' \frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{4}+\varepsilon}(m-n)}\right)$$

$$= O\left(x \sum_{m \leqq x} m^{-\frac{1}{4}+\varepsilon} \sum_{n<m}{}' \frac{1}{n^{\frac{3}{4}-\varepsilon}(m-n)}\right) = O\left(x \sum_{m \leqq x} m^{-1+2\varepsilon} \log m\right) = O(x^{1+3\varepsilon})$$

nd

$$s_2 = O\left(\sum_{m>x}\sum_{n<m}(mn)^{-\frac{5}{4}+\varepsilon}\frac{x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x}+\sqrt{m})}{\sqrt{m}-\sqrt{n}}\right)$$

$$= O\left(x^{\frac{3}{2}}\sum_{m>x}m^{-\frac{1}{4}+\varepsilon}\sum_{n<m}\frac{1}{n^{\frac{5}{4}-\varepsilon}(m-n)}\right) = O\left(x^{\frac{3}{2}}\sum_{m>x}m^{-\frac{5}{4}+\varepsilon}\right) = O(x^{\frac{5}{4}+\varepsilon}).$$

Es folgt somit aus (10)

17) $$\int_1^x (P_1(t))^2\,dt = \frac{1}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r(n)}{n^{\frac{5}{4}}}\right)^2\int_1^x (\delta_n(t))^2\,dt + O(x^{\frac{5}{4}+\varepsilon}).$$

Nach (11) haben wir

$$(\delta_n(t))^2 = \frac{1}{2}\Re[-i(\delta t^{\frac{3}{4}}e^{2\pi i\sqrt{nt}})^2] + \frac{1}{2}\delta t^{\frac{3}{4}}e^{2\pi i\sqrt{nt}}\cdot\delta t^{\frac{3}{4}}e^{-2\pi i\sqrt{nt}},$$

nd das Integral des ersten Gliedes rechts kann nach der Bemerkung zu
5) durch den Ausdruck

$$\frac{120x\sqrt{n\cdot n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = 60\,x\sqrt{n}$$

ajoriert werden. Der Beitrag der betreffenden Glieder in (17) ist also
on der Form

$$O\left(x\sum_1^{\infty}n^{-\frac{5}{2}+\varepsilon}\cdot n^{\frac{1}{2}}\right) = O(x),$$

oraus weiter

8) $$\int_1^x (P_1(t))^2\,dt = \frac{1}{2\pi^4}\sum_1^{\infty}\left(\frac{r(n)}{n^{\frac{5}{4}}}\right)^2\int_1^x \delta t^{\frac{3}{4}}e^{2\pi i\sqrt{nt}}\cdot\delta t^{\frac{3}{4}}e^{-2\pi i\sqrt{nt}}\,dt + O(x^{\frac{5}{4}+\varepsilon})$$

lgt.

Für $n \geqq x$ setzen wir hier

$$\delta t^{\frac{3}{4}}e^{+2\pi i\sqrt{nt}} = O(t^{\frac{3}{4}});$$

ir $n < x$ dagegen wenden wir die Identität

$$\delta f(t) = f(t+1) - f(t) = f'(t) + \int_t^{t+1}du\int_t^u f''(v)\,dv$$

n und erhalten

$$\delta t^{\frac{3}{4}}e^{2\pi i\sqrt{nt}} = \left(\pi i n^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{4}} + \frac{3}{4}t^{-\frac{1}{4}}\right)e^{2\pi i\sqrt{nt}} + O(nt^{-\frac{1}{4}})$$

$$= \pi i n^{\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{4}}e^{2\pi i\sqrt{nt}} + O(nt^{-\frac{1}{4}}),$$

$$\delta t^{\frac{3}{4}}e^{2\pi i\sqrt{nt}}\cdot\delta t^{\frac{3}{4}}e^{-2\pi i\sqrt{nt}} = \pi^2 nt^{\frac{1}{2}} + O(n^{\frac{3}{2}} + n^2t^{-\frac{1}{2}})$$

$$= \pi^2 nt^{\frac{1}{2}} + O(n^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}}),$$

wo die Abschätzungen gleichmäßig für $n < x$, $1 \leqq t \leqq x$ gelten. Durch Einsetzung in (18) ergibt sich

$$(19)\quad \int_1^x (P_1(t))^2\,dt = \frac{1}{2\pi^4}\sum_{n<x}\left(\frac{r(n)}{n^{\frac{5}{4}}}\right)^2\left(\frac{2}{3}\pi^2 n x^{\frac{3}{2}} + O(n^{\frac{3}{2}}x)\right) + O\Big(\sum_{n\geqq x} n^{-\frac{5}{2}+\varepsilon}\cdot x^{\frac{5}{4}}\Big) + O(x^{\frac{5}{4}+\varepsilon})$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3\pi^2}\sum_{n<x}\left(\frac{r(n)}{n^{\frac{3}{4}}}\right)^2 + O(x^{\frac{5}{4}+\varepsilon})$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{3\pi^2}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{r(n)}{n^{\frac{3}{4}}}\right)^2 + O(x^{\frac{5}{4}+\varepsilon}).$$

Endlich erhalten wir also aus (9)

$$\int_1^x (P(t))^2\,dt = \beta x^{\frac{3}{2}} + \int_1^x P_1(t)\cdot O(t^\varepsilon)\,dt + O(x^{\frac{5}{4}+\varepsilon}),$$

wo $\beta$ durch (6) gegeben ist. Aus (19) folgt aber nach der Schwarzschen Ungleichung

$$\int_1^x P_1(t)\cdot O(t^\varepsilon)\,dt = O\Big(\sqrt{\int_1^x (P_1(t))^2\,dt\cdot\int_1^x O(t^{2\varepsilon})\,dt}\Big) = O(x^{\frac{5}{4}+\varepsilon})$$

und hieraus

$$\int_1^x P(t)^2\,dt = \beta x^{\frac{3}{2}} + O(x^{\frac{5}{4}+\varepsilon}).$$

## § 2.

Um die analogen Resultate für das Restglied $\Delta(x)$ in dem Dirichletschen Teilerproblem ableiten zu können, brauchen wir einen Ausdruck von der Form (8) für das Integral

$$\int_0^t D(u)\,du = \sum_{n\leqq t}(t-n)\,d(n),$$

woraus dann der Satz in derselben Weise wie oben durch asymptotische Entwicklung und Differenzbildung abgeleitet werden könnte.

Ein solcher Ausdruck ließe sich zwar ohne Schwierigkeit durch Benutzung der in den oben angeführten Abhandlungen dargestellten Hardyschen Methoden aufstellen; auch gibt E. Landau in einer Arbeit[6]) einige ähnliche Formeln. In keiner von diesen Arbeiten findet sich jedoch das

[6]) Über Dirichlets Teilerproblem, Münchener Sitzungsberichte 1915, S. 317–328.

aue Gegenstück von (8), dagegen gibt Voronoï[7]) die asymptotische twicklung des gesuchten Ausdruckes in einer Form, die wir gerade an- nden können. Er beweist nämlich folgendes: Für jedes $k = 0, 1, 2\ldots$ $l$ $m = 1, 2, \ldots$ gilt

$$\sum_{\leq t} d(n)\frac{(t-n)^k}{k!} = \int_0^t \frac{(t-n)^k}{k!}(\log u + 2C)\,du + \sum_{\lambda=0}^{k}\zeta^2(-\lambda)\frac{(-1)^\lambda}{\lambda!}\frac{t^{k-\lambda}}{(k-\lambda)}$$

$$+\frac{1}{2}0^k d(t) + 2\sqrt{\pi}\sum_{\lambda=0}^{m-1} t^{\frac{k-\lambda}{2}+\frac{1}{4}}\frac{(2k+2\lambda+1)(2k+2\lambda-1)\ldots(2k+3-2\lambda)}{2^{4\lambda}\cdot\lambda!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} d(n)\frac{\cos\left[4\pi\sqrt{nt}+\frac{\pi}{2}\left(\lambda-k-\frac{1}{2}\right)\right]}{(4\pi^2 n)^{\frac{k+\lambda}{2}+\frac{3}{4}}} + O\left(t^{\frac{k-m}{2}+\frac{1}{4}}\right),$$

$0^0 = 1$ ist und $d(t)$ für nicht ganzzahliges $t$ Null bedeutet. Setzen in dieser Beziehung $k = 1$ und $m = 2$, so erhalten wir die gesuchte rmel

$$\int_0^t D(u)\,du = \int_0^t [u\log u + (2C-1)u]\,du + ut + b$$

$$\frac{t^{\frac{3}{4}}}{2\sqrt{2}\pi^2}\sum_1^\infty \frac{d(n)}{n^{\frac{5}{4}}}\sin\left(4\pi\sqrt{nt}-\frac{1}{4}\pi\right) + \frac{15t^{\frac{1}{4}}}{2^6\sqrt{2}\pi^3}\sum_1^\infty \frac{d(n)}{n^{\frac{3}{4}}}\cos\left(4\pi\sqrt{nt}-\frac{1}{4}\pi\right)$$

$$+ O(t^{-\frac{1}{4}}).$$

Von hier aus gelangen wir genau wie in § 1 zu der Gleichung

$$\Delta(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^2}\sum_1^\infty \frac{d(n)}{n^{\frac{5}{4}}}\delta t^{\frac{3}{4}}\sin\left(4\pi\sqrt{nt}-\frac{1}{4}\pi\right) + O(t^\varepsilon) = \Delta_1(t) + O(t^\varepsilon)$$

es ergibt sich weiter

$$\int_1^x (\Delta(t))^2 dt = \int_1^x (\Delta(t))^2 dt + \int_1^x \Delta_1(t)\cdot O(t^\varepsilon)\,dt + O(x^{1+\varepsilon}),$$

$$\int_1^x (\Delta_1(t))^2 dt = \frac{1}{8\pi^4}\sum_{m=1}^\infty\sum_{n=1}^\infty \frac{d(m)\,d(n)}{(mn)^{\frac{5}{4}}}\int_1^x \delta t^{\frac{3}{4}}\sin\left(4\pi\sqrt{mt}-\frac{1}{4}\pi\right)$$

$$\cdot\,\delta t^{\frac{3}{4}}\sin\left(4\pi\sqrt{nt}-\frac{1}{4}\pi\right)dt.$$

---

[7]) Sur une fonction transcendente et ses applications à la sommation de quelques s, Ann. de l'Ecole Normale (3) 21 (1904), S. 207–268 und S. 459–534. Vgl. psondere S. 218, wo jedoch im Wortlaut des Satzes ein Druckfehler vorkommt. bei dem Beweise (vgl. S. 499 und 514) berichtigt ist.

Die Abschätzungen des vorigen Paragraphen lassen sich wieder durc führen mit den trivialen Modifikationen, die durch die Verschiedenhe einiger Konstanten bedingt werden. Das Resultat wird

$$\int_1^x (\Delta(t))^2 dt = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6\pi^2} \sum_1^{\infty} \left(\frac{d(n)}{n^{\frac{3}{4}}}\right)^2 + O(x^{\frac{5}{4}+\varepsilon}).$$

Damit sind also die beiden Gleichungen (5) bewiesen; mit Hilfe c Schwarzschen Ungleichung folgen daraus unmittelbar die Gleichungen (7

(Eingegangen am 18. Oktober 1921.)

# ıe neue Herleitung des Exponentialgesetzes in der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Von

J. W. Lindeberg in Helsingfors (Finnland).

**1.** In einer Arbeit „*Über das Exponentialgesetz in der Wahrscheinkeitsrechnung*“ [1]) habe ich einige Sätze bewiesen, die sich auf die ge beziehen, unter welchen Bedingungen die Summe einer großen Anzahl unabhängigen Wahrscheinlichkeitsgrößen dem Gaußschen Gesetze folgt. Zeit der Redaktion dieser Arbeit hielt ich einen von Herrn v. Mises egebenen Satz [2]) für das schärfste bisher in dieser Frage gewonnene ultat. Nunmehr finde ich, daß schon Liapounoff [3]) allgemeine Reate dargelegt hat, die nicht nur über diejenigen des Herrn v. Mises usgehen, sondern aus denen auch die meisten der von mir in der oben annten Arbeit bewiesenen Tatsachen abgeleitet werden können.

Das Studium der Arbeiten von Liapounoff hat mich veranlaßt, von mir angewandte Methode aufs neue zu prüfen. Hierbei ist mir Umstand, daß meine Entwickelungen nur an endliche Reihen von rscheinlichkeitsgrößen knüpfen, immer deutlicher als formale Überıheit gegenüber der früheren Darstellungsweise hervorgetreten. Man erke in dieser Hinsicht, daß der Satz II der nachfolgenden Darstellung, mir für die mathematische Statistik unbedingt notwendig scheint, aus allgemeinen Satze, in welchem Liapounoff seine Resultate zusammen- [4]), nicht gefolgert werden kann, obgleich die Hilfsmittel Liapounoffs

[1]) Annales Academiae Scientiarum Fennicae **16** (1920), S. 1—23.

[2]) Fundamentalsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathematische Zeitschrift 919), (S. 1—97), S. 78.

[3]) Sur une proposition de la théorie des probabilités, Bulletin de l'Académie riale des sciences de St. Pétersbourg **13** (1900), S. 359—386. — Nouvelle forme héorème sur la limite de probabilité, Mémoires de l'Académie impériale des sciences t. Pétersbourg **12** (1902), S. 1—24.

[4]) Seite 3 der zweiten der soeben zitierten Arbeiten.

sehr wohl zur Ableitung desselben geeignet sind. Weiter habe ich
funden, daß meine Methode noch erheblich vereinfacht werden kann u
daß eine kleine Abänderung derselben zu einer nicht unwesentlichen sa
lichen Erweiterung aller mir jetzt bekannten früheren Resultate führt.

Im folgenden wird eine Darstellung meiner Methode und der dara
herfließenden Resultate gegeben. Hierbei wird zunächst versucht, ein
möglichst einfachen Beweis des oben erwähnten Satzes II zu geben, de
dies scheint mir die wichtigste Aufgabe der Theorie zu sein. Soda
wird der Beweisgang so abgeändert, daß ein möglichst umfassendes R
sultat erreicht wird.

Hinsichtlich des allgemeinen Charakters der Wahrscheinlichkeitsgröß
die wir in Betracht ziehen, machen wir von Anfang an keine and
Voraussetzung, als daß sie Verteilungsfunktionen[5]) besitzen. Demnach wi
im folgenden von Integralen immer im Sinne von Stieltjes die Rede se

Betreffs der im folgenden benutzten Bezeichnungsweise ist zu b
merken, daß wir die obere Grenze eines Integrals nicht hinschreiben, fa
dieselbe $+\infty$ ist; desgleichen wird die untere Grenze $-\infty$ weggelasse
Ferner werden wir uns durchgehend der abkürzenden Bezeichnung

$$\varphi(x, \sigma) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

bedienen, wo $\sigma$ eine positive Zahl bedeutet.

2. Es seien $U_1(x)$, $U_2(x)$, ..., $U_n(x)$ die Verteilungsfunktion
von $n$ voneinander unabhängigen Wahrscheinlichkeitsgrößen $u_1, u_2, \ldots, u$
Wir machen zunächst die folgenden Voraussetzungen.

Die Mittelwerte der Größen $u_\mu$ sind sämtlich Null, d. h. es ist f
$\mu = 1, 2, \ldots, n$

$$\int x\, dU_\mu(x) = 0.$$

Wenn die Streuungen der Größen $u_\mu$ mit $\sigma_\mu$ bezeichnet werden, d.
wenn

$$\int x^2\, dU_\mu(x) = \sigma_\mu^2$$

gesetzt wird, so ist

$$\sum_{\mu=1}^{n} \sigma_\mu^2 = 1.$$

Es sei $U(x)$ die Verteilungsfunktion der Summe $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u$
also die durch die Gleichung

$$(1) \quad U(x) = \int\int \ldots \int U_n(x - t_1 - t_2 - \ldots - t_{n-1})\, dU_{n-1}(t_{n-1}) \ldots dU_1(t_1$$

[5]) Wegen des Begriffes der Verteilungsfunktion verweise ich auf die scho
zitierte Arbeit des Herrn v. Mises und die Fortsetzung derselben in Bd. 5.

gebene Funktion, wo gemäß der oben gemachten Bemerkung über unsere zeichnungsweise in bezug auf sämtliche Veränderlichen $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ n $-\infty$ bis $+\infty$ zu integrieren ist. Zufolge der gemachten Voraus-zungen ist der Mittelwert der Größe $u$ Null und ihre Streuung gleich 1. r stellen uns zunächst die Aufgabe zu untersuchen, was von der Funk-n $U(x)$ hinsichtlich ihres Zusammenhanges mit der Funktion $\varphi(x, 1)$ schlossen werden kann.

**3.** Es bezeichne $f(x)$ eine für alle reellen Werte von $x$ erklärte nktion, die den folgenden Bedingungen genügt.

Sie ist nebst ihren zwei ersten Ableitungen stetig und $|f(x)|$ hat e endliche obere Grenze.

Die dritte Ableitung von $f(x)$ kann in einer endlichen Anzahl von nkten endliche Sprünge machen, sonst aber ist sie stetig.

Der absolute Betrag dieser dritten Ableitung ist überall kleiner oder ich einer gegebenen positiven Zahl $k$.

Mit $V(x)$ bezeichnen wir die Verteilungsfunktion einer beliebigen hrscheinlichkeitsgröße $v$ mit dem Mittelwerte Null und der Streuung $\sigma$. ließlich werde gesetzt

$$F(x) = \int f(x-t)\,dV(t).$$

Nach dem Taylorschen Satze ist

$$f(x-t) = f(x) - f'(x)t + f''(x)\frac{t^2}{2} + \zeta(x,t)\frac{t^3}{6},$$

$|\zeta(x,t)| \leqq k$. Führen wir diese Summe in den Ausdruck für $F(x)$ so wird mit Rücksicht auf die Definition von $V(x)$

$$F(x) = f(x) + \frac{f''(x)}{2}\sigma^2 + R,$$

$$R = \int \frac{\zeta(x,t)}{6} t^3\,dV(t)$$

somit

$$|R| < \frac{k}{6}\int |x|^3\,dV(x).$$

Es wird also

$$\left| F(x) - f(x) - \frac{f''(x)}{2}\sigma^2 \right| < \frac{k}{6}\int |x|^3\,dV(x).$$

Machen wir die spezielle Annahme, daß $v$ die Größe bedeutet, deren hrscheinlichkeitsdichte für jedes $x$ gleich $\varphi(x, \sigma)$ ist, und setzen wir

$$\Phi(x) = \int f(x-t)\varphi(t,\sigma)\,dt,$$

so erhalten wir aus (3), indem wir die Gleichung

$$\int |x|^3 \varphi(x, \sigma)\, dx = \frac{4\sigma^3}{\sqrt{2\pi}}$$

berücksichtigen,

$$\left| \Phi(x) - f(x) - \frac{f''(x)}{2}\sigma^2 \right| < \frac{2k\sigma^3}{3\sqrt{2\pi}}.$$

Mit (3) kombiniert gibt diese Ungleichung

$$|F(x) - \Phi(x)| < \frac{k}{6}\int |x|^3 dV(x) + \frac{2k\sigma^3}{3\sqrt{2\pi}}. \tag{4}$$

Diese letzte Ungleichung kann noch vereinfacht werden. In d Gleichung

$$\int_{-\frac{\sigma}{2}} x^2 dV(x) + \int_{-\frac{\sigma}{2}}^{+\frac{\sigma}{2}} x^2 dV(x) + \int_{+\frac{\sigma}{2}} x^2 dV(x) = \sigma^2$$

ist das mittlere Integral kleiner als $\frac{\sigma^2}{4}$, und also ist die Summe der beide übrigen Integrale größer als $\frac{3}{4}\sigma^2$. Andererseits ist

$$\int_{-\frac{\sigma}{2}} |x|^3 dV(x) \geqq \frac{\sigma}{2}\int_{-\frac{\sigma}{2}} x^2 dV(x)$$

und

$$\int_{+\frac{\sigma}{2}} |x|^3 dV(x) > \frac{\sigma}{2}\int_{+\frac{\sigma}{2}} x^2 dV(x),$$

was uns zeigt, daß

$$\int |x|^3 dV(x) > \frac{3}{8}\sigma^3.$$

Mit Rücksicht hierauf gibt (4)

$$|F(x) - \Phi(x)| < k\int |x|^3 dV(x). \tag{5}$$

**4.** Wir betrachten jetzt zwei Systeme von Funktionen

$$F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x) \quad \text{und} \quad \Phi_1(x), \Phi_2(x), \ldots, \Phi_n(x),$$

die wir in folgender Weise definieren:

$$F_1(x) = \int f(x-t)\, dU_1(t), \qquad \Phi_1(x) = \int f(x-t)\varphi(t, \sigma_1)\, dt,$$
$$F_2(x) = \int F_1(x-t)\, dU_2(t), \qquad \Phi_2(x) = \int \Phi_1(x-t)\varphi(t, \sigma_2)\, dt,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F_n(x) = \int F_{n-1}(x-t)\, dU_n(t), \qquad \Phi_n(x) = \int \Phi_{n-1}(x-t)\varphi(t, \sigma_n)\, dt.$$

Wegen der über die Funktion $f(x)$ gemachten Voraussetzungen können drei ersten Ableitungen der Funktion $\Phi_1(x)$ durch Differentiieren h $x$ unter dem Integralzeichen gebildet werden. Wenn berücksichtigt d, daß

$$\int \varphi(t, \sigma_1)\, dt = 1,$$

folgt hieraus, daß die Funktion $\Phi_1(x)$ nebst ihren drei ersten Abungen stetig ist, daß $|\Phi_1(x)|$ eine endliche obere Grenze besitzt, und die dritte Ableitung von $\Phi_1(x)$ dem absoluten Betrage nach kleiner $k$ ist. Hieraus folgt aber weiter, daß dieselben Eigenschaften auch Funktion $\Phi_2(x)$ und allen folgenden Funktionen $\Phi_\mu(x)$ zukommen, somit erfüllen diese Funktionen insbesondere alle der Funktion $f(x)$ erlegten Bedingungen.

Setzen wir nun

$$F_1(x) = \Phi_1(x) + \Delta_1(x),$$

ist nach (5)

$$|\Delta_1(x)| < k \int |x^3|\, dU_1(x)$$

jedes $x$. Führen wir ferner die Summe $\Phi_1(x) + \Delta_1(x)$ in das die nktion $F_2(x)$ darstellende Integral ein, so ergibt sich

$$F_2(x) = \int \Phi_1(x - t)\, dU_2(t) + \int \Delta_1(x - t)\, dU_2(t).$$

s erste Integral rechts unterscheidet sich nach (5) für jedes $x$ von $(x)$ um weniger als

$$k \int |x|^3\, dU_2(x),$$

n wie schon bemerkt wurde, erfüllt $\Phi_1(x)$ alle der Funktion $f(x)$ erlegten Bedingungen, und das zweite Integral wird, da es ja für jedes inen Mittelwert der Werte von $\Delta_1(x)$ mit gewissen durch $U_2(x)$ benmten Gewichten darstellt, seinem absoluten Betrage nach sicher nicht ßer als das Maximum von $|\Delta_1(x)|$. Wenn

$$F_2(x) = \Phi_2(x) + \Delta_2(x)$$

etzt wird, erhalten wir deshalb

$$|\Delta_2(x)| < k \left( \int |x|^3\, dU_1(x) + \int |x|^3\, dU_2(x) \right).$$

dieser Weise können wir weiter gehen. Bei jedem Schritte gelten dieen Überlegungen, und wir erhalten schließlich

$$|F_n(x) - \Phi_n(x)| < k \sum_{\mu=1}^{n} \int |x|^3\, dU_\mu(x).$$

Wir wollen die Funktionen $F_n(x)$ und $\Phi_n(x)$ näher in Betrach ziehen. Man findet durch sukzessives Einsetzen

$$(7)\quad \begin{cases} F_n(x) = \int\int \dots \int f(x - t_1 - t_2 - \dots - t_n)\, dU_1(t_1)\, dU_2(t_2) \dots dU_n(t_n), \\ \Phi_n(x) = \int\int \dots \int f(x - t_1 - t_2 - \dots - t_n)\, \varphi(t_1, \sigma_1)\, \varphi(t_2, \sigma_2) \dots \varphi(t_n, \sigma_n)\, dt_1 \end{cases}$$

Führen wir die durch (1) gegebene Funktion $U(x)$ ein, so können w die erste Gleichung offenbar kurz schreiben

$$F_n(x) = \int f(x - t)\, dU(t).$$

Andererseits ist bekanntlich der Wert des Integrals

$$\int\int \dots \int \varphi(x - t_1 - t_2 - \dots - t_{n-1}, \sigma_n)\, \varphi(t_{n-1}, \sigma_{n-1}) \dots \varphi(t_1, \sigma_1)\, dt_{n-1} \dots dt$$

gleich $\varphi(x, \sigma)$, wo $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2$ und also, wegen unsere Voraussetzungen, $\sigma = 1$. Somit wird die zweite der Gleichungen (7) einfac

$$\Phi_n(x) = \int f(x - t)\, \varphi(t, 1)\, dt.$$

und die Ungleichung (6) kann geschrieben werden

$$(8)\quad \left| \int f(x - t)\, dU(t) - \int f(x - t)\, \varphi(t, 1)\, dt \right| < k \sum_{\mu=1}^{n} \int |x|^3\, dU_\mu(x).$$

**5.** Aus dieser Ungleichung erhellt schon ein bemerkenswerter Zu sammenhang zwischen den Funktionen $U(x)$ und $\varphi(x, 1)$. Wir wolle aber ein präziseres Resultat formulieren, indem wir eine obere Grenz für den absoluten Wert der Differenz

$$U(x) - \int^{x} \varphi(t, 1)\, dt$$

aufstellen.

Wir setzen zur Abkürzung

$$(9)\quad l = \frac{4}{\sqrt[3]{2k}}$$

und definieren eine von $k$ abhängige Funktion $g(x)$ in folgende Weise. Für $x < 0$ ist $g(x) = 0$, für $x > l$ $g(x) = 1$. Zwischen den Nullpunkte und der Stelle $x = l$ ist die Funktion $g(x)$ dadurch be stimmt, daß sie nebst ihren zwei ersten Ableitungen stetig ist, während ihre dritte Ableitung in den Intervallen $\left(0, \frac{l}{4}\right)$ und $\left(\frac{3l}{4}, l\right)$ den Wert $k$ im Intervalle $\left(\frac{l}{4}, \frac{3l}{4}\right)$ den Wert $-k$ hat. Diese Bedingungen sind wegen (9) miteinander verträglich und bestimmen eindeutig die Funktion $g(x)$.[6]

[6]) Diese Funktion wächst im Intervalle $(0, l)$ stetig von 0 bis 1.

Setzen wir in (8) einmal $f(x) = g(x)$ und sodann $f(x) = g(x+l)$, as zulässig ist, weil $g(x)$ die der Funktion $f(x)$ auferlegten Bedingungen füllt, so erhalten wir die beiden Ungleichungen

$$|\int g(x-t)\,dU(t) - \int g(x-t)\,\varphi(t,1)\,dt| < k\sum_{\mu=1}^{n}\int |x|^3\,dU_\mu(x)$$

nd

$$\int g(x-t+l)\,dU(t) - \int g(x-t+l)\,\varphi(t,1)\,dt| < k\sum_{\mu=1}^{n}\int |x|^3\,dU_\mu(x).$$

Weiter bestehen aber offenbar die Ungleichungen

$$\int g(x-t)\,dU(t) \leqq \int^{x} dU(t) \leqq \int g(x-t+l)\,dU(t),$$

$$\int g(x-t)\,\varphi(t,1)\,dt < \int^{x} \varphi(t,1)\,dt < \int g(x-t+l)\,\varphi(t,1)\,dt$$

nd

$$|\int g(x-t+l)\,\varphi(t,1)\,dt - \int g(x-t)\,\varphi(t,1)\,dt| < \frac{l}{\sqrt{2\pi}}.$$

Durch Kombination aller dieser Ungleichungen ergibt sich

$$|U(x) - \int^{x} \varphi(t,1)\,dt| < k\sum_{\mu=1}^{n}\int |x|^3\,dU_\mu(x) + \frac{l}{\sqrt{2\pi}}.$$

Bisher ist keine Voraussetzung über die Größe von $k$ gemacht worden. Um zu erreichen, daß die beiden Glieder der rechten Seite der soeben erhaltenen Ungleichung in bezug auf die dort auftretende Integralsumme von derselben Ordnung werden, bestimmen wir $k$ gemäß der Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2k}} = \Big(\sum_{\mu=1}^{n}\int |x|^3\,dU_\mu(x)\Big)^{\frac{1}{4}}$$

und erhalten dann mit Rücksicht auf (9), indem wir uns mit einer groben Abschätzung des numerischen Faktors begnügen,

$$\Big|U(x) - \int^{x} \varphi(t,1)\,dt\Big| < 3\Big(\sum_{\mu=1}^{n}\int |x|^3\,dU_\mu(x)\Big)^{\frac{1}{4}}.$$

Auf Grund dieser Ungleichung können wir den folgenden Satz aussprechen:

Satz I. *Wenn die positive Zahl $\varepsilon$ noch so klein gewählt ist, ist es möglich, die positive Zahl $\eta$ so zu wählen, daß für alle $x$*

$$\Big|U(x) - \int^{x} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dt\Big| < \varepsilon,$$

*sobald nur*

$$\sum_{\mu=1}^{n} \int |x|^3 U_\mu(x) < \eta.$$

6. Wir lassen jetzt die im § 2 gemachte Annahme $\sum_{\mu=1}^{n} \sigma_\mu^2 = 1$ falle führen dagegen die Voraussetzung ein, daß die sämtlichen Größen $u_\mu$ nu solcher Werte fähig sind, deren absolute Beträge unterhalb einer gewisse endlichen oberen Grenze $d_n$ liegen. Ferner setzen wir

$$\sum_{\mu=1}^{n} \sigma_\mu^2 = r_n^2.$$

Es ist für jedes $\mu$ von 1 bis $n$

$$\int x \, dU_\mu(r_n x) = 0,$$

und da

$$\sum_{\mu=1}^{n} \int x^2 \, dU_\mu(r_n x) = \frac{1}{r_n^2} \sum_{\mu=1}^{n} \sigma_\mu^2 = 1,$$

erfüllen also die zu den Verteilungsfunktionen $U_\mu(r_n x)$ gehörigen Wahr scheinlichkeitsgrößen alle Voraussetzungen des § 2. Weiter ist offenbar di Verteilungsfunktion der Summe dieser neuen Größen gleich $U(r_n x)$. Wen $\varepsilon$ beliebig klein gewählt ist, kann man also nach Satz I $\eta$ so klei wählen, daß

$$\left| U(r_n x) - \int^{x} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dt \right| < \varepsilon, \tag{10}$$

sobald

$$\sum_{\mu=1}^{n} \int |x|^3 \, dU_\mu(r_n x) < \eta.$$

Nun ist aber

$$\sum_{\mu=1}^{n} \int |x|^3 \, dU_\mu(r_n x) = \frac{1}{r_n^3} \sum_{\mu=1}^{n} \int |x|^3 \, dU_\mu(x)$$

und weiter nach der oben gemachten Voraussetzung

$$\sum_{\mu=1}^{n} \int |x|^3 \, dU_\mu(x) < d_n \sum_{\mu=1}^{n} \int x^2 \, dU_\mu(x) = d_n r_n^2,$$

woraus folgt

$$\sum_{\mu=1}^{n} \int |x|^3 \, dU_\mu(r_n x) < \frac{d_n}{r_n}.$$

omit besteht (10), sobald $\frac{d_n}{r_n} < \eta$. Denken wir uns in (10) $\frac{x}{r_n}$ und $\frac{t}{r_n}$ nstatt $x$ und $t$ eingeführt, so können wir das erhaltene Resultat in der olgenden Form aussprechen:

Satz II. *Es seien $u_1, u_2, \ldots, u_n$ Wahrscheinlichkeitsgrößen, deren ögliche Absolutwerte sämtlich unterhalb der Grenze $d_n$ bleiben, und eren Mittelwerte sämtlich gleich Null sind. Die Streuungen dieser rößen seien $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, und die Summe der Quadrate derselben sei leich $r_n^2$.*

*Wenn dann $U(x)$ die Verteilungsfunktion der Summe $u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ ezeichnet, so kann zu jeder positiven Zahl $\varepsilon$ eine andere positive Zahl $\eta$ efunden werden, derart, daß*

$$\left| U(x) - \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-\frac{t^2}{2r_n^2}}}{r_n\sqrt{2\pi}}\, dt \right| < \varepsilon,$$

*obald*

$$\frac{d_n}{r_n} < \eta.$$

Wir denken uns noch die Größen $u_n$ sowohl hinsichtlich ihrer Anzahl ls in bezug auf die Form ihrer Verteilungsfunktionen in der Weise ver- nderlich, daß gleichzeitig $d_n$ gegen Null geht und $r_n$ einem von Null erschiedenen Werte $r$ zustrebt. Dann ist nach dem soeben bewiesenen atze *gleichmäßig für alle $x$*

$$\lim U(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-\frac{t^2}{2r^2}}}{r\sqrt{2\pi}}.$$

Im Satze II und in der zuletzt gemachten Aussage dürfte der präzise nhalt der klassischen Behauptung zu sehen sein, daß die Summe einer roßen Anzahl voneinander unabhängiger kleiner Fehler dem Gaußschen esetze folgt.

7. Bisher ist es unser Ziel gewesen, in möglichst einfacher Weise zu em Satze II zu gelangen. Wir stellen uns jetzt wieder auf den Boden er Voraussetzungen des § 2 und wollen zeigen, daß die im Satze I usgesprochene Bedingung durch eine weniger fordernde ersetzt werden kann.

Es bezeichne $s(x)$ die Funktion von $x$, die für $|x| < 1$ gleich $x^3$ nd für alle anderen Werte des Argumentes gleich $x^2$ ist. Eine kleine Ab- nderung des vorigen Beweisganges wird uns zu dem folgenden Satze führen:

Satz III. *Wenn die positive Zahl $\varepsilon$ noch so klein genommen ist, nn die positive Zahl $\eta$ so gewählt werden, daß*

$$\left| U(x) - \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dt \right| < \varepsilon,$$

*sobald nur*

$$\sum_{\mu=1}^{n} \int s(x)\, dU_\mu(x) < \eta.$$

Indem wir zu den Entwickelungen des § 3 zurückkehren, nehmen wir jetzt an, daß die Funktion $f(x)$ außer den dort angegebenen Bedingungen noch der Forderung genügt, daß die Funktionen $|f(x)|$, $|f'(x)|$ und $\left|\frac{f''(x)}{2}\right|$ für alle $x$ kleiner als $\frac{k}{24}$ verbleiben. Ferner nehmen wir an, daß $\sigma < 1$. Mit diesen verstärkten Annahmen läßt sich der Inhalt des § 3 wie folgt modifizieren.

Da das Produkt $\frac{\zeta(x,t)}{6} t^3$ in der Gleichung (2) den Ausdruck

$$f(x-t) - f(x) + f'(x)t - \frac{f''(x)}{2} t^2$$

repräsentiert, und diese zufolge der über $f(x)$ gemachten Voraussetzungen für $|t| \geqq 1$ absolut kleiner als $\frac{kt^2}{6}$ ist, so kann man bei der Abschätzung des Integrals (2) für Werte von $t$ außerhalb des Intervalles $-1 < t <$ diese letzte obere Grenze benutzen, und es ergibt sich dann

$$|R| < \frac{k}{6} \int s(x)\, dV(x),$$

woraus folgt

$$|F(x) - \Phi(x)| < \frac{k}{6} \int s(x)\, dV(x) + \frac{2k\sigma^3}{3\sqrt{2\pi}}.$$

Entweder ist nun

$$\int_{-\infty}^{-1} x^2 dV(x) + \int_{+1}^{\infty} x^2 dV(x) \geqq \frac{\sigma^2}{4}$$

oder diese Ungleichung besteht nicht. Im ersteren Falle ist die Summe links, und also auch das Integral

$$\int s(x)\, dV(x),$$

größer als $\frac{\sigma^3}{4}$, da ja $\sigma < 1$ vorausgesetzt wurde. Im zweiten Falle zeigt uns die dann bestehende Ungleichung

$$\int_{-1}^{-\frac{\sigma}{2}} x^2 dV(x) + \int_{-\frac{\sigma}{2}}^{+\frac{\sigma}{2}} x^2 dV(x) + \int_{+\frac{\sigma}{2}}^{+1} x^2 dV(x) > \frac{3}{4}\sigma^2,$$

vie im § 3, daß

$$\int_{-1}^{+1} |x|^3 dV(x) > \frac{\sigma^3}{4}$$

nd also

$$\int s(x) dV(x) > \frac{\sigma^3}{4}.$$

Diese letzte Ungleichung besteht also in jedem Falle, und wir erhalten omit

$$|F(x) - \Phi(x)| < c k \int s(x) dV(x),$$

vo $c = \frac{1}{6} + \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} < \frac{3}{2}$.

Auf Grund dieser Ungleichung können nun dieselben Schlüsse gezogen werden wie im Vorigen. Da die sämtlichen Größen $\sigma_\mu$ kleiner als 1 sind, bleiben die Entwickelungen des § 4 in allen Hinsichten gültig, wenn wir überall

$$\frac{3}{2} \int s(x) dU_\mu(x)$$

anstatt

$$\int |x|^3 dU_\mu(x)$$

schreiben. Was die Entwickelungen des § 5 betrifft, gilt dasselbe, wobei jedoch zu beachten ist, daß wir diesmal $k$ hinreichend groß annehmen müssen, damit die Funktion $g(x)$ die der Funktion $f(x)$ auferlegten neuen Bedingungen erfülle. Mit Hinsicht auf die am Ende des § 5 getroffene Wahl des Wertes von $k$ bedeutet aber dies nur, daß die Summe

$$\sum_{\mu=1}^{n} \int s(x) dU_\mu(x) \tag{11}$$

hinreichend klein sein soll, was wir offenbar annehmen dürfen. Hiermit ist die Richtigkeit des Satzes III dargelegt[7]).

Es ist zu bemerken, daß die Summe (11) immer einen bestimmten endlichen Wert hat, sobald die Streuungen der Größen $u_\mu$ endliche Werte haben. Hinsichtlich des allgemeinen Verhaltens der Verteilungsfunktionen $U_\mu(x)$ im Unendlichen kann also nicht weniger gefordert werden, als in der Bedingung des Satzes III enthalten ist.

---

[7]) Es verdient vielleicht hervorgehoben zu werden, daß dieser Satz, wie man leicht findet, noch gültig bleibt, wenn die Funktion $s(x)$ wie folgt definiert wird:

$$s(x) = |x|^3 \quad \text{für} \quad |x| < \varrho$$
$$s(x) = \varrho x^2 \quad \text{„} \quad |x| > \varrho,$$

wo $\varrho$ eine positive Zahl bedeutet, die beliebig klein gewählt sein kann.

8. Der Inhalt des Satzes III kann in verschiedenen Formen aus gesprochen werden. Um eine zweite Formulierung desselben zu erhalten wollen wir zeigen, daß zwischen der Integralsumme (11) und der Differenz

$$1-\int_0^1 d\tau \sum_{\mu=1}^{n} \int_{-\tau}^{+\tau} x^2\, dU_\mu(x) \tag{12}$$

ein solcher Zusammenhang besteht, daß sie immer gleichzeitig unendlich klein werden.

Indem wir mit $\varepsilon$ eine kleine positive Zahl bezeichnen, nehmen wir an, daß

$$\sum_{\mu=1}^{n} \int s(x)\, dU_\mu(x) < \varepsilon .$$

Wenn $\tau$ eine positive Zahl, kleiner als 1, bedeutet, ist offenbar

$$\sum_{\mu=1}^{n} \int^{-\tau} s(x)\, dU_\mu(x) + \sum_{\mu=1}^{n} \int_{+\tau} s(x)\, dU_\mu(x) > \tau \left( \sum_{\mu=1}^{n} \int^{-\tau} x^2\, dU_\mu(x) + \sum_{\mu=1}^{n} \int_{+\tau} x^2\, dU_\mu \right.$$

woraus folgt

$$\sum_{\mu=1}^{n} \int^{-\tau} x^2\, dU_\mu(x) + \sum_{\mu=1}^{n} \int_{+\tau} x^2\, dU_\mu(x) < \frac{\varepsilon}{\tau},$$

und weiter, wenn wir die Gleichung

$$\sum_{\mu=1}^{n} \int x^2\, dU_\mu(x) = 1 \tag{13}$$

berücksichtigen,

$$1 - \sum_{\mu=1}^{n} \int_{-\tau}^{+\tau} x^2\, dU_\mu(x) < \frac{\varepsilon}{\tau}.$$

Die linke Seite dieser Ungleichung ist also für $\tau > \sqrt{\varepsilon}$ kleiner als $\sqrt{\varepsilon}$; für $\tau < \sqrt{\varepsilon}$ ist sie offenbar jedenfalls kleiner als 1. Nun ist die Größe (12) nichts anderes als das zwischen den Grenzen 0 und 1 gebildete Integral dieser linken Seite in bezug auf $\tau$. Indem wir das Integrationsintervall in die zwei Teile $(0, \sqrt{\varepsilon})$ und $(\sqrt{\varepsilon}, 1)$ zerlegen, erhalten wir deshalb

$$1 - \int_0^1 d\tau \sum_{\mu=1}^{n} \int_{-\tau}^{+\tau} x^2\, dU_\mu(x) < 2\sqrt{\varepsilon}.$$

Also wird die Größe (12) immer unendlich klein, wenn (11) unendlich klein wird.

Umgekehrt sei angenommen, daß

$$1-\int_0^1 d\tau \sum_{\mu=1}^{n} \int_{-\tau}^{+\tau} x^2\, dU_\mu(x) < \varepsilon.$$

ndem wir mit $\lambda$ eine Zahl zwischen 0 und 1 bezeichnen, können wir iese Ungleichung in der Form

$$\int_0^{\lambda} d\tau \sum_{\mu=1}^{n} \int_{-\tau}^{+\tau} x^2\, dU_\mu(x) + \int_{\lambda}^{1} d\tau \sum_{\mu=1}^{n} \int_{-\tau}^{+\tau} x^2\, dU_\mu(x) > 1-\varepsilon$$

chreiben. Wenn wir im ersten Gliede links die zu integrierende Summe durch ihren Wert für $\tau = \lambda$ ersetzen und im zweiten Gliede statt der Summe den Wert 1 setzen, wodurch die linke Seite nur vergrößert wird, ntsteht eine Ungleichung, die durch Division mit $\lambda$

$$\sum_{\mu=1}^{n} \int_{-\lambda}^{+\lambda} x^2\, dU_\mu(x) > 1 - \frac{\varepsilon}{\lambda}$$

ibt. Setzen wir hier $\lambda = \sqrt{\varepsilon}$, so ergibt sich

$$\sum_{\mu=1}^{n} \int_{-\sqrt{\varepsilon}}^{+\sqrt{\varepsilon}} x^2\, dU_\mu(x) > 1 - \sqrt{\varepsilon}$$

nd weiter mit Rücksicht auf (13)

$$\sum_{\mu=1}^{n} \int^{-\sqrt{\varepsilon}} x^2\, dU_\mu(x) + \sum_{\mu=1}^{n} \int_{+\sqrt{\varepsilon}} x^2\, dU_\mu(x) < \sqrt{\varepsilon},$$

woraus folgt

$$\sum_{\mu=1}^{n} \int^{-\sqrt{\varepsilon}} s(x)\, dU_\mu(x) + \sum_{\mu=1}^{n} \int_{+\sqrt{\varepsilon}} s(x)\, dU_\mu(x) < \sqrt{\varepsilon}.$$

Fügen wir hierzu die wegen (13) offenbar richtige Ungleichung

$$\sum_{\mu=1}^{n} \int_{-\sqrt{\varepsilon}}^{+\sqrt{\varepsilon}} s(x)\, dU_\mu(x) < \sqrt{\varepsilon},$$

so erhalten wir schließlich

$$\sum_{\mu=1}^{n} \int s(x)\, dU_\mu(x) < 2\sqrt{\varepsilon}.$$

Der Zusammenhang zwischen den Größen (11) und (12), der aus den Obigen erhellt, zeigt uns, daß wir im Satze III (12) anstatt (11) ein führen können, und wir erhalten somit den folgenden Satz:

Satz IV. *Wenn die positive Zahl $\varepsilon$ beliebig klein gegeben ist, kann die positive Zahl $\eta$ so bestimmt werden, daß für jedes $x$*

$$\left| U(x) - \int \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dt \right| < \varepsilon,$$

*sobald nur*

$$\int_0^1 d\tau \sum_{\mu=1}^{n} \int_{-\tau}^{+\tau} x^2 dU_\mu(x) > 1 - \eta.$$

9. Die Ausdehnung des obigen Satzes auf die Summe von Wahrscheinlichkeitsgrößen mit beliebigen endlichen Mittelwerten und Streuungen ist unmittelbar. Es ergibt sich der folgende allgemeine Satz:

Satz V. *Es seien $U_1(x), U_2(x), \ldots, U_n(x)$ die Verteilungsfunktionen der Wahrscheinlichkeitsgrößen $u_1, u_2, \ldots, u_n$, die endliche Mittelwerte und Streuungen besitzen. $U(x)$ sei die Verteilungsfunktion der Summe $u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, und es werde gesetzt*

$$\int x\, dU_\mu(x) = b_\mu, \qquad \sum_{\mu=1}^{n} b_\mu = B_n$$

$$\int x^2\, dU_\mu(x + b_\mu) = \sigma_\mu^2, \quad \sum_{\mu=1}^{n} \sigma_\mu^2 = r_n^2.$$

*Wenn die positive Zahl $\varepsilon$ beliebig klein gegeben ist, ist es möglich, eine positive Zahl $\eta$ so zu bestimmen, daß für jedes $x$*

$$\left| U(r_n x + B_n) - \int \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dt \right| < \varepsilon,$$

*sobald nur*

$$\int_0^1 d\tau \sum_{\mu=1}^{n} \int_{-\tau}^{+\tau} x^2 dU_\mu(r_n x + b_\mu) > 1 - \eta.$$

Um die Richtigkeit des Satzes einzusehen, bemerke man, daß die Wahrscheinlichkeitsgrößen, deren Verteilungsfunktionen $U_\mu(r_n x + b_\mu)$ sind, alle Bedingungen des § 2 erfüllen, und daß $U(r_n x + B_n)$ die Verteilungsfunktion ihrer Summe ist. Wenn man den Satz IV auf diese neuen Größen anwendet, ergibt sich unmittelbar das obige Resultat.

**10.** Wenden wir den erhaltenen Satz auf eine gegebene unendliche eihe von Wahrscheinlichkeitsgrößen $u_1, u_2, \ldots$ mit den Verteilungsfunk-onen $U_1(x), U_2(x), \ldots$ an, so ergibt sich mit Beibehaltung der früheren ezeichnungen und der Annahme der Endlichkeit der Mittelwerte und reuungen das Resultat, daß *gleichmäßig für alle* $x$

$$\lim_{n=\infty} U(r_n x + B_n) = \int^{x} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dt$$

enn

$$\lim_{n=\infty} \int_0^1 d\tau \sum_{\mu=1}^{n} \int_{-\tau}^{+\tau} x^2 \, dU_\mu(r_n x + b_\mu) = 1.$$

Man erkennt ohne Schwierigkeit, daß dieses Resultat eine Erweiterung es im Eingange dieser Arbeit erwähnten Satzes von Liapounoff bildet.

(Eingegangen am 20. November 1921.)

# Über das Eulersche Summierungsverfahren.

Von

Konrad Knopp in Königsberg.

## Einleitung.

In neuerer Zeit, insbesondere seit den allgemeinen Untersuchungen E. Borels, hat sich mehr und mehr herausgestellt, daß den divergenten Reihen in der Analysis ein volles Bürgerrecht neben den konvergenten gewährt werden muß und gewährt werden kann. Denn durch die mannigfachsten Verfahren kann einer divergenten unendlichen Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ bzw. der Folge ihrer Teilsummen $s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$, welch letztere also keinem bestimmten endlichen Grenzwerte zustreben, eine Zahl $s'$ zugeordnet werden, von der sich dann zeigen läßt, daß sie wesentlich alle *die* Eigenschaften in bezug auf die Reihe hat, die der Summe einer konvergenten Reihe bzw. dem Grenzwert einer konvergenten Folge in bezug auf diese zukommen.

Das Gemeinsame dieser Verfahren besteht darin[1]), daß mit Hilfe einer bestimmten Matrix

$$A = (a_{kn}) = \begin{Bmatrix} a_{00} & a_{01} \cdots a_{0n} \cdots \\ a_{10} & a_{11} \cdots a_{1n} \cdots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{k0} & a_{k1} \cdots a_{kn} \cdots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{Bmatrix}$$

eine lineare Transformation der Teilsummen $s_n$ vorgenommen wird, durch die die Folge der Zahlen

$$s_k' = a_{k0} s_0 + a_{k1} s_1 + \ldots + a_{kn} s_n + \ldots \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

[1]) Näheres findet man in meinem Lehrbuch „*Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*“, Berlin 1922, im XIII. Kapitel.

s der Folge $s_0, s_1, \ldots$ gewonnen und an deren Stelle in bezug auf die nvergenz untersucht wird, — eine Transformation, die wir auch kurz durch

$$s' = A(s)$$

zeichnen wollen. *Ist nun die Matrix A so beschaffen, daß sie*

I. *aus jeder konvergenten Zahlenfolge* $(s_n)$ *eine gegen denselben enzwert strebende Zahlenfolge* $(s'_k)$ *macht*[2]), *und daß sie*

II. *mindestens eine nicht konvergente Folge* $(s_n)$ *in eine konvergente lge* $(s'_k)$ *verwandelt,*

*läßt sich auf ihr ein Summierungsverfahren gründen.*

Jede divergente unendliche Reihe, deren Teilsummen $s_n$ durch die nutzte lineare Transformation $A$ auf eine (etwa gegen $s'$) konvergierende lge $(s'_k)$ führt, wird als *summierbar zur Summe* $s'$ bezeichnet, genauer s summierbar unter Benutzung der Matrix $A$ oder kürzer als *A-summierbar mit der Summe* $s'$. Von der Folge $(s_n)$ selber wollen wir in mselben Sinne sagen, sie sei *A-limitierbar zum Werte* $s'$[3]), und wir reiben kurz: $A\text{-}\lim s_n = s$.

Die erste der eben genannten Bedingungen — die sog. *Permanenzdingung*[4]) — hat dann zur Folge, daß jede konvergente Reihe mit der mme $s$ auch als summierbar zur Summe $s$ anzusehen ist. Und die eite Bedingung bewirkt, daß das Verfahren nicht überflüssig ist, sondern ß dadurch auch gewissen divergenten Reihen eine Summe zugeordnet wird.

Die Gesamtheit der Reihen, für die die Folge $(s'_k)$ konvergent ausfällt, llen wir dann mit O. Toeplitz[5]) als das *Konvergenzfeld* des Verfahrens w. der Matrix $A$ bezeichnen.

Wie schon angedeutet, wird man ein solches Verfahren nur dann als auchbar ansehen können, wenn die einer divergenten Reihe auf Grund sselben zugesprochene Summe $s'$ wesentlich dieselben Eigenschaften in zug auf die Reihe besitzt, wie sie bei einer konvergenten Reihe deren mme zukommen. Welche Eigenschaften man hier als wesentlich ansehen hat, läßt sich natürlich nicht eindeutig festlegen, und je nach

---

[2]) Wir bezeichnen dann die Operation $A$ mit I. Schur (*Über die Äquivalenz Cesàroschen und Hölderschen Mittelwerte*, Mathematische Annalen 74 (1913), 447—458) kurz als eine *reguläre* Operation.

[3]) Die *limite généralisée* von É. Borel ist wohl die erste in der Literatur auftende Bezeichnung dieses Sachverhaltes, bei dem einer divergenten Folge durch ein timmtes Verfahren ein Grenzwert zugeordnet wird.

[4]) Diese Bedingung, die zuerst von G. H. Hardy ausdrücklich formuliert worden wurde von diesem als *condition of consistency* bezeichnet und ist dann in zu rtlicher Übersetzung vielfach als „Konsistenzbedingung" bezeichnet worden.

[5]) O. Toeplitz, *Über allgemeine lineare Mittelbildungen*, Prace matematyczno-rczne 22 (1911), S. 113—119.

Auswahl der Matrix $A$ wird das Verfahren mehr oder weniger in dies Richtung zu leisten vermögen. Als Mindestforderungen, die an die Brauc barkeit eines Summierungsverfahrens zu stellen sind, wollen wir das Weite bestehen der einfachsten Regeln für das Rechnen mit konvergenten Reih fordern, also etwa der folgenden[6]):

1. *Sind die Reihen* $a_0 + a_1 + \ldots$ *und* $b_0 + b_1 + \ldots$ *A-summierb mit den Summen* $s$ *bzw.* $t$, *so ist auch* $(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + \ldots$ *A-sum mierbar und zwar zur Summe* $s + t$.

2. *Ist* $a_0 + a_1 + \ldots$ *A-summierbar zur Summe* $s$, *so ist au* $(ca_0) + (ca_1) + \ldots$ *A-summierbar und zwar zur Summe* $cs$.

3. *Ist* $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ *A-summierbar zur Summe* $s$, *so ist au die Reihe* $a_1 + a_2 + \ldots$ *A-summierbar und zwar zur Summe* $s - a_0$.

4. *Ist* $a_0 + a_1 + \ldots$ *A-summierbar zur Summe* $s$, *so ist auch d Reihe* $a + a_0 + a_1 + \ldots$ *A-summierbar und zwar zur Summe* $s + a$.

Die Regeln 1. und 2. besagen, daß man summierbare Reihen gliedwe addieren und subtrahieren oder mit einer Konstanten soll multipliziere dürfen und zwar mit derselben Wirkung wie bei konvergenten Reihe Indem man zur Reihe $a_0 + a_1 + \ldots$ diejenige (konvergente und nach also summierbare) Reihe addiert, deren $\mu$-tes Glied $= a_\nu - a_\mu$ und dere $\nu$-tes Glied $= a_\mu - a_\nu$ ist $(\mu \gtrless \nu)$ und deren übrige Glieder sämtlich $=$ sind, folgt dann aus 1., daß man bei einer summierbaren Reihe irgen zwei Glieder miteinander vertauschen darf, ohne daß die Summierbarkei aufgehoben oder der Summenwert geändert wird, — falls das Verfahre die genannten Forderungen erfüllt. Mit 3. und 4. zusammen besagt die dann, daß man auch bei summierbaren Reihen „endlich viele Änderungen“[7] vornehmen darf und zwar mit derselben Wirkung wie bei konvergenten Reihe

Erfüllt ein Summierungsverfahren noch weitere Bedingungen dieser Art z. B. die folgende:

5. *Sind die Reihen* $\Sigma a_n$ *und* $\Sigma b_n$ *summierbar mit den Summen* $s$ *und* $t$, *so ist auch die Cauchysche Produktreihe* $\Sigma(a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$ *summierbar und zwar zur Summe* $s \cdot t$.

---

[6]) Diese Forderungen sind für die Summierungsverfahren wohl zum ersten Mal von G. Doetsch (*Eine neue Verallgemeinerung der Borelschen Summabilitätstheori der divergenten Reihen*, Inaugural Dissertation, Göttingen 1920) ausdrücklich zu sammengestellt worden.

[7]) Darunter pflegt man zu verstehen, daß man aus einer unendlichen Reih $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ dadurch eine neue unendliche Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a'_n$ herleitet, daß man endlich viel Glieder wegstreicht oder endlich viele Glieder voranstellt oder endlich viele Gliede abändert (oder alles zugleich) und nun die Glieder der entstandenen Reihe neu mi $a'_0, a'_1 \ldots$ bezeichnet. (Näheres s. in meinem, in Fußn. [1]) genannten Lehrbuch, S. 4 und 125.)

eine Bedingung die aber bekanntlich schon für konvergente Reihen nicht füllt ist —, so wird dies die Brauchbarkeit des Verfahrens erhöhen; erllt es nicht einmal die Bedingungen 1. bis 4., so wird es kaum mit ützen verwendet werden können. Darüber hinaus aber wird ein Verhren um so wertvoller sein, je leichter es sich einerseits analytisch handben läßt und je größer andererseits sein Konvergenzfeld ist.

Allgemein bekannt sind jetzt das Cesàrosche und das Borelsche erfahren. Das erstere ist analytisch leicht zu handhaben, genügt den en aufgestellten vier Forderungen und manchen weiteren (z. B. im wesentchen der eben unter 5. genannten), hat aber nur ein relativ beschränktes Wirkungsfeld, da es z. B. Potenzreihen außer in den Konvergenzpunkten öchstens noch auf dem Rande des Konvergenzkreises summiert. Das orelsche Verfahren hat dagegen ein recht großes Wirkungsfeld, summiert B. die geometrische Reihe $\Sigma z^n$ in der ganzen Halbebene $\Re(z) < 1$ und lgemein eine beliebige Potenzreihe in einem gewissen (in den einfachsten ällen geradlinigen) Polygon, das den Konvergenzkreis umschließt (Näheres u.). Dafür ist es aber analytisch merklich schwerer zu handhaben und, as besonders ins Gewicht fällt, es erfüllt nicht die Forderung 3., so daß so, wenn $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$ nach dem Borelschen Verfahren summierbar t, die Reihe $a_1 + a_2 + \ldots$ es nicht zu sein braucht[8]).

Im folgenden soll nun eines der ältesten Verfahren dieser Art, nämlich n schon von Euler[9]) herrührendes näher untersucht und in die allemeine Theorie eingereiht werden. Es besteht zunächst in folgendem:

Die Reihe $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$, für die wir je nach Bedürfnis auch $- b_1 + b_2 - + \ldots$ schreiben wollen (so daß für alle $n \geqq 0$ also $= (-1)^n a_n$ ist), entsteht aus der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ für $x = 1$ oder us der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{y}{1-y}\right)^{n+1}$$

ir $y = \frac{1}{2}$. Entwickelt man diese letztere nach Potenzen von $y$, so erält man

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a_\nu \right) y^{n+1}.$$

---

[8]) Dieser Mangel des Borelschen Verfahrens wurde von G. H. Hardy (*Researches the theory of divergent series and divergent integrals*, The quarterly Journal of pure nd applied mathematics **35** (1904), S. 22—66) bemerkt und durch ein einfaches eispiel illustriert.

[9]) Man findet es z. B. in den *Institutiones calculi differentialis* 1755, S. 281.

Setzt man nun $y = \frac{1}{2}$ und zur Abkürzung

$$\frac{1}{2^{k+1}} \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} a_\nu = \frac{1}{2^{k+1}} \Delta^k b_0 \text{ [10]} = a_k',$$

so bezeichnet man die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k' \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k b_0}{2^{k+1}}$$

als die *Eulersche Transformation* der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n$.

Erst in neuerer Zeit ist bewiesen worden, daß die transformierte Reihe stets konvergiert, wenn die gegebene Reihe dies tut, und zwar zu derselben Summe [11]). Das Verfahren, von dem wir gleich zeigen werden, daß es sich unter die eingangs genannten $A$-Verfahren einreihen läßt, erfüllt also die oben gestellte Permanenzbedingung I. Und daß es ein weiter über den Bereich der konvergenten Reihen sich erstreckendes Konvergenzfeld besitzt, lehren die folgenden einfachen Beispiele:

a) Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ geht wegen

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} z^\nu = (1+z)^n$$

in die Reihe

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+z}{2}\right)^n$$

über, die also in dem Kreise $|z+1| < 2$ konvergiert.

b) $1 - 2 + 3 - 4 + - \ldots$ geht in $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + 0 + 0 + 0 + \ldots$ über.

c) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + - \ldots$ geht in $\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{2}{8} + 0 + 0 + \ldots$ über.

d) $1^p - 2^p + 3^p - 4^p + - \ldots$ geht, falls $p$ eine positive ganze Zahl ist, in eine *endliche* Reihe von $p+1$ Gliedern über, deren Summe

$$= \frac{2^{p+1} - 1}{p+1} B_{p+1}$$

---

[10]) Wir setzen wie üblich $b_n - b_{n+1} = \Delta b_n$, für $k > 1$ dann

$$\Delta^{k-1} b_n - \Delta^{k-1} b_{n+1} = \Delta^k b_n$$

und verstehen unter $\Delta^0 b_n$ die Zahl $b_n$ selber. Dann ist allgemein

$$\Delta^k b_n = b_n - \binom{k}{1} b_{n+1} + \binom{k}{2} b_{n+2} - + \ldots + (-1)^k \binom{k}{k} b_{n+k}.$$

[11]) Dies hat zuerst L. D. Ames (*Evaluation of slowly convergent series*, Annals of mathematics (2) **3** (1901), S. 185—192) bewiesen. Weitere Beweise gaben E. Jacobsthal (*Mittelwertbildung und Reihentransformation*, Mathematische Zeitschrift **6** (1920), S. 100—117) und anschließend K. Knopp (*Mittelwertbildung und Reihentransformation*, Mathematische Zeitschrift **6** (1920), S. 118—122). Im Beginn des folgenden § 1 werden noch zwei weitere Beweise gegeben.

, wenn $B_\nu$ die gemäß $\frac{x}{e^x-1}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{B_\nu}{\nu!}x^\nu$ definierten Bernoullischen hlen sind.

Wir werden nun in § 1 die zur Eulerschen Transformation gehörige atrix bestimmen, mit deren Hilfe die Teilsummen $s_n$ von $\Sigma a_n$ in die eilsummen $s_k'$ von $\Sigma a_k'$ übergehen, und werden zeigen, daß das Verfahren ißer der Permanenzbedingung I und der Erweiterungsbedingung II auch e Forderungen 1 bis 4 erfüllt, die wir allgemein an ein brauchbares erfahren stellen wollten.

In § 2 werden die durch Iterierung der Eulerschen Transformation ıtstehenden Reihen untersucht und für ganze $p \geqq 0$ dadurch eine $(Ep)$-ımmierbarkeit eingeführt, die für $p=1$ in die bisher betrachtete über-ht und für $p=0$ die gewöhnliche Konvergenz bedeutet. Deren An-endung auf Potenzreihen wird zeigen, daß diese $(Ep)$-Summierbarkeit er wesentlich dasselbe zu leisten vermag wie die Borelsche Summation, a eine Potenzreihe in jedem inneren Punkte des Borelschen Summations-olygons sich auch als $(Ep)$-summierbar erweist (und zwar mit derselben ımme) und mehr noch: für jedes innere $z$ des genannten Polygons ist e $p$-te Eulersche Transformierte der Potenzreihe sogar absolut kon-ergent, wenn $p$ passend gewählt wird.

In § 3 wird die $(Ep)$-Summierbarkeit für beliebige (reelle oder kom-exe) Ordnungen $p$ definiert und die zugehörige Transformationsmatrix ıtersucht, die sich indessen nur für reelle $p \geqq 0$ als regulär erweist.

In § 4 wird die zur $(Ep)$-Summierbarkeit gehörige Diagonalmatrix ıfgestellt und in § 5 ein einfaches Zahlenbeispiel dafür gegeben, daß von en Konvergenzfeldern der $(Ep)$- und der $(Cp)$-Summierbarkeit keines n Teil des andern ist, daß insbesondere also, trotz der Ergebnisse des 2, Reihen existieren, die $(C\,1)$-summierbar, aber nicht $(Ep)$-summier-ar sind.

## § 1.

## Die Eulersche Matrix.

*Sind $s_n$ die Teilsummen $a_0+a_1+\ldots+a_n$ von $\Sigma a_n$ und $s_k'$ die eilsummen $a_0'+a_1'+\ldots+a_k'$ von $\Sigma a_k'$ mit*

$$a_k'=\frac{1}{2^{k+1}}\sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}a_\nu,$$

*ist*

$$s_k'=\frac{\binom{k+1}{1}s_0+\binom{k+1}{2}s_1+\ldots+\binom{k+1}{k+1}s_k}{2^{k+1}}.$$

Beweis. Bezeichnen wir den Wert der rechten Seite zunächst mit $s_k^*$, so ist für $k > 0$

$$2^{k+1}(s_k^* - s_{k-1}^*) = \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k+1}{\nu+1} s_\nu - 2\sum_{\nu=0}^{k-1} \binom{k}{\nu+1} s_\nu$$

$$= \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} s_\nu - \sum_{\nu=1}^{k} \binom{k}{\nu} s_{\nu-1}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} a_\nu = 2^{k+1} a_k' = 2^{k+1}(s_k' - s_{k-1}'),$$

$$s_k^* - s_{k-1}^* = s_k' - s_{k-1}'.$$

Da nun offenbar $s_0^* = s_0'$ ist, so ist hiernach allgemein $s_k^* = s_k'$.[12]) Für die transformierende Matrix $A = (a_{kn})$ ist hier also

$$a_{kn} = \frac{1}{2^{k+1}} \binom{k+1}{n+1}.$$[13])

*Die hierdurch definierte Operation $s' = A(s)$ ist überdies regulär.* Denn strebt $s_n \to s$ und setzt man $s_n = s + \varepsilon_n$, so ist

$$s_k' = \frac{2^{k+1}-1}{2^{k+1}} s + \frac{\binom{k+1}{1}\varepsilon_0 + \binom{k+1}{2}\varepsilon_1 + \ldots + \binom{k+1}{k+1}\varepsilon_k}{2^{k+1}},$$

und es genügt zu zeigen, daß der letzte Summand zugleich mit $\varepsilon_k$ gegen 0 strebt. Wählt man aber bei gegebenem $\varepsilon > 0$ ein $m$ so groß, daß für $\nu > m$ stets $|\varepsilon_\nu| < \frac{1}{2}\varepsilon$ bleibt, so ist dieser letzte Summand für $k > m$

$$< \frac{1}{2^{k+1}} \left| \binom{k+1}{1}\varepsilon_0 + \ldots + \binom{k+1}{m+1}\varepsilon_m \right| + \frac{\varepsilon}{2},$$

also für alle hinreichend großen $k$ sicher $< \varepsilon$, weil bei festem $\nu$ die Folge $\frac{1}{2^{k+1}}\binom{k+1}{\nu} \to 0$ strebt[14]).

---

[12]) Zweiter Beweis: Für $x = y:(1-y)$ ist, wie in der Einleitung gezeigt,

$$\sum a_n x^n = 2(1-y)\sum a_n'(2y)^n$$

und folglich

$$\sum s_n x^n = \frac{1}{1-x}\sum a_n x^n = 2\frac{(1-y)^2}{1-2y}\sum a_n'(2y)^n = 2(1-y)^2\sum s_n'(2y)^n.$$

Es ist also

$$\sum s_n'(2y)^n = \frac{1}{2(1-y)^2}\sum s_n x^n = \frac{1}{2y^2}\sum s_{n-1}\left(\frac{y}{1-y}\right)^{n+1}. \quad (s_{-1}=0)$$

$$= \sum \frac{1}{2^{n+1}}\left[\binom{n+1}{1}s_0 + \ldots + \binom{n+1}{n+1}s_n\right](2y)^n.$$

[13]) Es ist also $a_{kn} = 0$ für $n > k$.

[14]) In seiner in Fußnote 5 genannten Arbeit hat O. Toeplitz allgemein bewiesen, daß eine Operation $s' = A(s)$ *dann und nur dann regulär* ist, wenn 1. in

Das Summierungsverfahren, das sich auf diese spezielle Matrix gründet, füllt also die *Permanenzbedingung I*, und daß sie die *Erweiterungs-dingung II* erfüllt, war schon am Ende der Einleitung durch Beispiele legt.

Daß sie darüber hinaus die *Forderungen* 1 *und* 2 erfüllt, ist wegen s linearen Charakters der Transformation evident. *Sie erfüllt aber auch e Forderungen* 3 *und* 4. Hat nämlich $a_0 + a_1 + \ldots$ die Teilsummen $s_1, \ldots$ und $a_1 + a_2 + \ldots$ die Teilsummen $t_0, t_1, \ldots$, so ist bezüg-h 3 zu zeigen, daß aus

$$s_k' = \frac{1}{2^{k+1}}\left[\binom{k+1}{1} s_0 + \binom{k+1}{2} s_1 + \ldots + \binom{k+1}{k+1} s_k\right] \to s$$

gt, daß

$$t_k' = \frac{1}{2^{k+1}}\left[\binom{k+1}{1} t_0 + \binom{k+1}{2} t_1 + \ldots + \binom{k+1}{k+1} t_k\right] \to s - a_0$$

ebt. Wegen $t_\nu = s_{\nu+1} - a_0$, $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$, ist aber

$$2^{k+1} t_k' = \left[\binom{k+1}{1} s_1 + \binom{k+1}{2} s_2 + \ldots + \binom{k+1}{k+1} s_{k+1}\right] - [2^{k+1} - 1] a_0,$$

d es genügt, zu zeigen, daß aus der Annahme (s) folgt, daß auch

$$\frac{1}{2^{k+1}}\left[\binom{k+1}{1} s_1 + \binom{k+1}{2} s_2 + \ldots + \binom{k+1}{k+1} s_{k+1}\right] \to s$$

ebt. Bildet man die Differenz der beiden Beziehungen (s) und ($s_1$), sieht man weiter, daß es zu zeigen genügt, daß

$$\frac{1}{2^{k+1}}\left[\binom{k+1}{1} a_1 + \binom{k+1}{2} a_2 + \ldots + \binom{k+1}{k+1} a_{k+1}\right] \to 0,$$

er also daß

$$\frac{1}{2^k}\left[\binom{k}{0} a_0 + \binom{k}{1} a_1 + \ldots + \binom{k}{k} a_k\right] \to 0$$

s (s) folgt. Da dieser letzte Ausdruck aber nichts anderes ist als $'_k$ und da die Voraussetzung (s) nur besagte, daß $\Sigma a_k'$ konvergiert, so ebt in der Tat $2a_k' \to 0$.

Dadurch daß, wie nun bewiesen, das Eulersche Verfahren die Forde-ng 3 erfüllt, erweist es sich dem Borelschen gegenüber als vorteil-fter. Und da wir andererseits sehen werden, daß das Konvergenzfeld s Eulerschen Verfahrens im wesentlichen ebenso groß ist, wie das des relschen, so ergibt sich hieraus eine gewisse Überlegenheit des Euler-

er Spalte von $A$ eine Nullfolge steht, wenn 2. eine Konstante $M$ existiert, so daß Summe der Beträge beliebig vieler Glieder einer jeden Zeile $< M$ bleibt, und nn 3. die (wegen der vorigen Bedingung sicher existierenden) Zeilensummen $= a_{k_0} + a_{k_1} + \ldots$ mit wachsendem $k$ gegen 1 streben. — Daß die eben benutzte zielle Matrix $A$ diese Bedingungen erfüllt, ist ganz unmittelbar zu sehen.

schen über das Borelsche Verfahren, zumal es auch rechnerisch leicht zu handhaben ist.

Ähnlich zeigt man, *daß auch die Forderung 4 von dem Eulerschen Verfahren erfüllt wird.* Wir haben dazu aus der Annahme (s) folgern, daß

$$t_k' = \frac{1}{2^{k+1}}\left[\binom{k+1}{1}t_0 + \binom{k+1}{2}t_1 + \ldots + \binom{k+1}{k+1}t_k\right] \to s + a$$

strebt, wenn mit $t_0, t_1, \ldots$ jetzt die Teilsummen von $a + a_0 + a_1 + \ldots$ bezeichnet werden. Da dann aber $t_0 = a$ und für $\nu \geqq 1$ stets $t_\nu = s_{\nu-1} + \ldots$ ist, so bedeutet dies, daß

$$\frac{1}{2^{k+1}}\left[\binom{k+1}{2}s_0 + \binom{k+1}{3}s_1 + \ldots + \binom{k+1}{k+1}s_{k-1} + (2^{k+1}-1)a\right] \to s + a$$

streben soll. Aus der Annahme (s) muß jetzt also gefolgert werden, daß auch

$$(s_0) \qquad \frac{1}{2^{k+1}}\left[\binom{k+1}{2}s_0 + \binom{k+1}{3}s_1 + \ldots + \binom{k+1}{k+1}s_{k-1}\right] \to s$$

strebt. Bildet man die Differenz der Beziehungen (s) und $(s_0)$, so sieht man, daß es auch zu zeigen genügt, daß

$$\frac{1}{2^{k+1}}\left[\binom{k+1}{1}a_0 + \binom{k+1}{2}a_1 + \ldots + \binom{k+1}{k+1}a_k\right] \to 0$$

oder

$$\frac{1}{2^k}\left[\binom{k}{0}\cdot 0 + \binom{k}{1}a_0 + \ldots + \binom{k}{k}a_{k-1}\right] \to 0$$

strebt. Setzen wir, wie oben, $(-1)^\nu a_\nu = b_\nu$ für $\nu \geqq 0$ und $b_{-1} = 0$, so lautet die Behauptung auch einfach

$$(b) \qquad \frac{1}{2^k}\Delta^k b_{-1} \to 0,$$

während aus der Voraussetzung (s), d. h. also aus der Konvergenz von $\Sigma a_k'$, sofort folgt, daß

$$(a) \qquad 2a_k' = \frac{1}{2^k}\sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}a_\nu = \frac{1}{2^k}\Delta^k b_0 \to 0$$

strebt. Es genügt also, (b) aus (a) zu folgern. Da aber allgemein

$$b_0 + \Delta b_0 + \Delta^2 b_0 + \ldots + \Delta^{k-1} b_0 = b_{-1} - \Delta^k b_{-1} = -\Delta^k b_{-1}$$

t[15]), so handelt es sich schließlich darum, daß, wenn $\Delta^\nu b_0 = 2^\nu \cdot \varepsilon_\nu$ ge-tzt wird, aus $\varepsilon_\nu \to 0$ die Gleichung

$$\frac{\varepsilon_0 + 2\varepsilon_1 + 4\varepsilon_2 + \ldots + 2^{k-1}\varepsilon_{k-1}}{2^k} \to 0$$

folgert werden soll. Das ist aber ganz unmittelbar möglich, da es sich er wieder um eine lineare Transformation (Mittelbildung) der $\varepsilon_\nu$ handelt, e sofort als regulär erkannt wird.

Auf Grund dieser Sätze hat es auf die Wirkung des Verfahrens inerlei Einfluß, wenn wir die Indizes der Folge $(s_n)$ alle um dieselbe nze Zahl erhöhen oder erniedrigen. Wir benutzen diese Freiheit, um r zu Anfang dieses Paragraphen aufgestellten linearen Transformation, e die Eulersche Reihentransformation auf die Teilsummen der Reihe sübt, die folgende symmetrischere Form zu geben:

$$(E) \qquad s_k' = \frac{1}{2^k}\left[\binom{k}{0}s_0 + \binom{k}{1}s_1 + \binom{k}{2}s_2 + \ldots + \binom{k}{k}s_k\right].$$

ach dem Bewiesenen liefert diese also dann und nur dann eine gegen $s$ nvergierende Zahlenfolge $(s_k')$, wenn die wie bisher transformierte Reihe $a_k'$ mit der Summe $s$ konvergiert. Demgemäß definieren wir nun:

Definition. *Eine unendliche Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *soll E-summierbar, die olge* $(s_n)$ *ihrer Teilsummen E-limitierbar mit dem Werte s genannt erden, wenn die durch die Formel* $(E)$ *definierte Folge* $(s_k')$ *gegen s nvergiert. Wir schreiben dann kurz:* $E\text{-}\lim s_n = s$.

Die $s_k'$ gehen dabei aus den $s_n$ durch eine lineare Transformation rvor, deren Matrix wir als die *Eulersche Matrix* bezeichnen wollen nd die die folgende ist:

$$E = (e_{kn}) \quad \text{mit} \quad e_{kn} = \frac{1}{2^k}\binom{k}{n}.$$

as hierauf gegründete Summierungs- bzw. Limitierungsverfahren erfüllt e Forderungen I, II und 1 bis 4 der Einleitung[15a]).

[15]) In dem Differenzenschema einer Folge $(c_n)$:

$$\begin{array}{ccccc} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & \ldots. \\ \Delta c_0 & \Delta c_1 & \Delta c_2 & \ldots. & \\ \Delta^2 c_0 & \Delta^2 c_1 & \ldots. & & \\ \Delta^3 c_0 & \ldots. & & & \\ \ldots. & & & & \end{array}$$

jedes Element nicht nur die Differenz des links über ihm und rechts über ihm henden, sondern auch des links neben ihm und links unter ihm stehenden Elementes.

[15a]) Auch die Forderung 5) ist in weitem Maße erfüllt, nämlich in ganz ähnlicher Weise wie bei den konvergenten Reihen selbst, wo bekanntlich der folgende

Daß wir die Matrix mit den Elementen $\frac{1}{2^k}\binom{k}{n}$ statt wie zuerst mit den Elementen $\frac{1}{2^{k+1}}\binom{k+1}{n+1}$ benutzen, kann natürlich auch so gedeutet werden, daß die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{wie bisher in} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a'_k \quad \text{mit} \quad a'_k = \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} a_\nu$$

transformiert wird, daß aber

$$s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}, \qquad s'_k = a'_0 + a'_1 + \ldots + a'_{k-1}$$

für $n \geqq 1$ bzw. $k \geqq 1$ und $s_0 = s'_0 = 0$ gesetzt wird.

## § 2.

### Die $(Ep)$-Summierbarkeit für ganze positive $p$. Anwendung auf Potenzreihen.

Ist die durch $s' = E(s)$ aus einer gegebenen Folge $(s_n)$ hergeleitete Folge $(s'_k)$ noch nicht konvergent, so kann man möglicherweise durch Iterierung des Verfahrens zu einer konvergenten Folge gelangen. Wir setzen

$$E(s') = s'' \quad \text{und allgemein} \quad E(s^{(p-1)}) = s^{(p)}$$

für $p \geqq 2$ und nennen nun die gegebene Reihe $(Ep)$-*summierbar*, die Folge $(s_n)$ selbst $(Ep)$-*limitierbar* mit dem Werte $s$, wenn bei festgehaltenem $p$ die Folge $s_k^{(p)} \to s$ strebt; wir schreiben dann: $(Ep)\text{-}\lim s_n = s$.

Es ist nicht schwer, die Reihe aufzustellen, deren Teilsummen die $s_k^{(p)}$ sind und die wir als $p$-te *Eulersche Transformierte* von $\Sigma a_n$ bezeichnen wollen. In leicht verständlicher symbolischer Schreibweise war

$$a'_k = \frac{1}{2}\left(\frac{1+a}{2}\right)^k,$$

und $\Sigma a''_k$ wird die zweite Eulersche Transformierte von $\Sigma a_n$ sein, wenn

$$a''_k = \frac{1}{2}\left(\frac{1+a'}{2}\right)^k = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(1+\frac{1+a}{2}\right)^k = \frac{1}{4}\left(\frac{3+a}{4}\right)^k = \frac{1}{4^{k+1}}\sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}3^{k-\nu}a_\nu$$

---

Satz von Mertens (s. etwa S. 312 meines in [1]) genannten Lehrbuches) gilt: „Sind die Reihen $\Sigma a_n = A$ und $\Sigma b_n = B$ konvergent und ist wenigstens *eine* von ihnen absolut konvergent, so ist auch $\Sigma(a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0)$ konvergent und hat die Summe $AB$.“ — Diesem Satz genau entsprechend gilt hier: „Wenn die Reihen $\Sigma a_n$ und $\Sigma b_n$ für ein gewisses $p$ zur Summe $A$ bzw. $B$ $(Ep)$-summierbar sind (s. § 2), d. h. wenn ihre $p$-ten Eulerschen Transformierten $\Sigma a_n^{(p)} = A$ und $\Sigma b_n^{(p)} = B$ konvergieren und wenn wenigstens *eine* dieser letzteren Reihen absolut konvergiert, so ist auch die Reihe $\Sigma(a_n b_0 + \ldots + a_0 b_n)$ $(Ep)$-summierbar und zwar zur Summe $AB$“. Bekanntlich hat G. H. Hardy bewiesen (S. 43 der in [2]) genannten Arbeit), daß die Borelsche Summierung die ganz entsprechende Eigenschaft besitzt.

esetzt wird, — eine Rechnung, die man auch ganz direkt verifiziert, dem man

$$a_k'' = \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} a_n' = \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{n=0}^{k} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{2^{n+1}} \binom{k}{n} \binom{n}{\nu} a_\nu$$

usrechnet. Ganz ähnlich erhält man als $p$-te Eulersche Transformierte on $\Sigma a_n$ die Reihe $\Sigma a_k^{(p)}$ mit

$$a_k^{(p)} = \frac{1}{(2^p)^{k+1}} \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} (2^p - 1)^{k-\nu} a_\nu .$$

ie hierbei sich einstellenden Transformationsmatrizen sind, von dem -mal hinzugekommenen Faktor $\frac{1}{2}$ abgesehen, nichts anderes als die otenzen von $E$ selber[16]). Es ist also

$$E^p = (e_{kn}^{(p)}) \quad \text{mit} \quad e_{kn}^{(p)} = \frac{1}{(2^p)^k} \binom{k}{n} (2^p - 1)^{k-n}$$

nd demnach, wenn zur Abkürzung $2^p - 1 = q$ gesetzt wird,

$$s_k^{(p)} = \frac{1}{(2^p)^k} \left[ \binom{k}{0} q^k s_0 + \binom{k}{1} q^{k-1} s_1 + \ldots + \binom{k}{k} s_k \right].$$ [17])

ierbei haben dann (vgl. den letzten Absatz des vorigen Paragraphen) e $s_k^{(p)}$ die Bedeutung

$$s_0^{(p)} = 0 \quad \text{und für } k \geqq 1: \quad s_k^{(p)} = a_0^{(p)} + a_1^{(p)} + \ldots + a_{k-1}^{(p)}.$$

---

[16]) Durch diesen Umstand, daß sich die die Summierbarkeit herbeiführende Transrmation der Teilsummen $s_n$ auch unmittelbar an der Reihe selbst als *Reihentransrmation* verfolgen läßt — noch dazu in einer bei beiden formal völlig parallel ufenden Weise — unterscheidet sich die $E$-Summierbarkeit vorteilhaft von allen nderen Summierungsverfahren, bei denen die transformierten Zahlen $s_k'$ bzw. $s_k^{(p)}$ nicht ne weiteres wieder als Teilsummen einer transformierten Reihe erkennbar sind. iesem Umstande verdankt die Eulersche Reihentransformation auch ihre große edeutung für die *numerische Auswertung* von Reihen.

[17]) Natürlich kann man $E^p$ auch ganz leicht direkt ausrechnen. So ist z. B.

$$e_{kn}'' = \sum_{\nu=n}^{k} e_{k\nu} \cdot e_{\nu n} = \sum_{\nu=n}^{k} \frac{1}{2^k} \binom{k}{\nu} \cdot \frac{1}{2^\nu} \binom{\nu}{n} \cdot$$

egen

$$\binom{k}{\nu} \binom{\nu}{n} = \binom{k}{n} \binom{k-n}{\nu-n}$$

t dies

$$= \frac{1}{2^k} \binom{k}{n} \cdot \sum_{\nu=n}^{k} \frac{1}{2^\nu} \binom{k-n}{\nu-n} = \frac{1}{2^k} \binom{k}{n} \cdot \frac{1}{2^n} \sum_{\lambda=0}^{k-n} \binom{k-n}{\lambda} \frac{1}{2^\lambda}$$

$$= \frac{1}{2^k} \binom{k}{n} \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{2}\right)^{k-n} = \frac{1}{4^k} \binom{k}{n} \cdot 3^{k-n}.$$

Das Konvergenzfeld der Matrix $E^p$ wird mit wachsendem $p$, allgemein zu reden, immer größer und nähert sich dem des Borelschen Verfahrens[18], nach dem eine Folge $s_0, s_1, \ldots$ *B-limitierbar*, die zugehörige Reihe *B-summierbar* zum Werte $s$ genannt wird, wenn für $x \to +\infty$

$$e^{-x} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} s_n \cdot \frac{x^n}{n!} \to s$$

strebt. Die folgenden Beispiele sollen dies belegen.

1. Beispiel. Für die geometrische Reihe $\Sigma z^n$ lautet die $p$-te Eulersche Transformierte

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{(2^p)^{k+1}}\sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}(2^p-1)^{k-\nu}z^\nu\right] = \frac{1}{2^p}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2^p-1+z}{2^p}\right)^k,$$

und diese fällt dann (und nur dann) konvergent aus, wenn $|z+(2^p-1)|<2^p$ ist, wenn also $z$ im Innern des Kreises um den Punkt $-(2^p-1)$ mit dem Radius $2^p$ liegt. Da dieser Kreis einerseits für ein passendes $p$ jeden inneren Punkt der Halbebene $\Re(z)<1$ umschließt, und da andererseits diese Halbebene genau das Gebiet ist, in dem die geometrische Reihe durch das Borelsche Verfahren summiert wird, so können wir sagen. *daß die geometrische Reihe in jedem Punkte $z$, in dem sie B-summierbar ist für ein passendes $p$ auch $(Ep)$-summierbar ist,* — ja, die $p$-te Eulersche Transformierte von $\Sigma z^n$ *konvergiert sogar absolut* in allen Punkten, in denen sie überhaupt konvergiert.

2. Beispiel. Durch Vermittlung der Cauchyschen Integralformel kann dies für die geometrische Reihe gewonnene Resultat für beliebige Potenzreihen nutzbar gemacht werden. Es sei also

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

eine beliebige Potenzreihe mit positivem Radius. *Wo konvergieren ihre Eulerschen Transformierten?* Wir behaupten, daß dies in jedem inneren Punkt des *Borelschen Summationspolygons* stattfindet, das folgendermaßen definiert ist[18]): Man setze $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ längs des Halbstrahles $\arc z = \varphi$ geradlinig fort, bis man an den ersten auf ihm gelegenen singulären Punkt $\zeta = \zeta(\varphi)$ stößt. Dort ziehe man die Normale zu dem Halbstrahl und nenne diejenige der beiden Halbebenen, in die die Ebene durch diese Normale zerlegt wird, welche den Nullpunkt enthält, $H(\varphi)$. (Liegt auf dem gewählten Halbstrahle überhaupt kein singulärer Punkt des Elementes

[18]) Alles Nähere über dieses Verfahren findet man bei E. Borel, *Séries divergentes*, Paris 1901, besonders S. 97 ff. u. S. 120 ff.

$c_n z^n$, so soll $H(\varphi)$ die ganze Ebene bedeuten.) Die inneren Punkte des urchschnitts aller $H(\varphi)$ für $0 \leqq \varphi < 2\pi$ bilden das *Borelsche Summa-nspolygon*, das wir mit $\mathfrak{B}$ bezeichnen wollen[19]). Dann gilt der folgende tz, der die allgemeine Konvergenzfrage vollständig erledigt, wenn man — e stets in solchen Fällen — von den Randpunkten der auftretenden ereiche absieht:

Satz 1. *In jedem inneren Punkte von $\mathfrak{B}$ ist $\Sigma c_n z^n$ $(Ep)$-summierbar und die $p$-te Transformierte von $\Sigma c_n z^n$ sogar absolut konvergent, wenn nur $p$ passend gewählt wird. Der dadurch erhaltene Summenwert ist gleich dem durch geradlinige analytische Fortsetzung vom Nullpunkt her sich ergebenden Funktionswert des Elementes $\Sigma c_n z^n$. Außerhalb $\mathfrak{B}$ sind alle Eulerschen Transformierten von $\Sigma c_n z^n$ divergent.*

Ehe wir dies beweisen, fragen wir noch, wie der Bereich der $(Ep)$-ummierbarkeit bei festem $p$ aussieht. Ist wie eben $\zeta(\varphi)$ der erste auf em Halbstrahl $\arc z = \varphi$ beim Fortsetzen des Elementes $\Sigma c_n z^n$ von 0 er angetroffene singuläre Punkt, so werde mit $K(\varphi)$ der Kreis

$$\frac{z}{\zeta} + 2^p - 1 < 2^p$$

ezeichnet, der also den Mittelpunkt $-(2^p-1)\zeta$ hat und der durch den unkt $\zeta$ hindurch geht. (Liegt auf dem gewählten Halbstrahl überhaupt ein singulärer Punkt, so soll $K(\varphi)$ wieder die ganze Ebene bedeuten.) er Durchschnitt aller $K(\varphi)$ für $0 \leqq \varphi < 2\pi$ wird in den einfachsten ällen die Gestalt eines Kreisbogenpolygons haben; wir bezeichnen seine neren Punkte in jedem Falle mit $\mathfrak{B}_p$ und behaupten den

Satz 2. *Bei festem $p$ ist $\Sigma c_n z^n$ in jedem inneren Punkte von $\mathfrak{B}_p$ $(Ep)$-summierbar und die $p$-te Transformierte von $\Sigma c_n z^n$ sogar absolut konvergent. Die hierdurch den Punkten von $\mathfrak{B}_p$ zugeordneten Zahlenwerte liefern die Fortsetzung des Elementes $\Sigma c_n z^n$ in den Bereich $\mathfrak{B}_p$. Außerhalb von $\mathfrak{B}_p$ ist die $p$-te Eulersche Transformierte von $\Sigma c_n z^n$ divergent.*

Da mit wachsenden $p$ die Bereiche $\mathfrak{B}_p$ sich dem Borelschen Sum-ationspolygon in dem Sinne anschmiegen, daß jeder innere Punkt von für ein hinreichend hohes $p$ auch innerer Punkt von $\mathfrak{B}_p$ ist, während ndererseits für jedes $p$ der Bereich $\mathfrak{B}_p$ in $\mathfrak{B}$ gelegen ist, so ist Satz 1

---

[19]) Es wird natürlich nur in den einfachsten Fällen die Gestalt eines geradlinigen olygons haben. Ist jedoch $\Sigma c_n z^n$ z. B. über den Konvergenzkreis hinaus nicht fort-tzbar, so ist das Summationspolygon mit diesem Kreise identisch. $\mathfrak{B}$ ist aber in dem Falle, ebenso wie jeder der gleich nachher definierten Bereiche $\mathfrak{B}_p$, ein kon-exer Bereich, in dem das durch $\Sigma c_n z^n$ definierte Funktionselement eindeutig und gulär ist, und der den Konvergenzkreis von $\Sigma c_n z^n$ als Teil in sich enthält.

offenbar eine unmittelbare Folge von Satz 2. Es genügt also diese letzteren zu beweisen[20]).

Beweis von Satz 2. Die Punkte $z$, die für jedes feste $\varphi$ in $0 \leqq \varphi < 2$ auf der Strecke von 0 einschließlich bis $\zeta = \zeta(\varphi)$ ausschließlich gelege sind, bilden den Mittag-Lefflerschen *Stern* des Elementes $\Sigma c_n z^n$, d Punkte $\zeta$ seine Ecken. Bezüglich jeder Ecke soll der Kreis $\left|\frac{z}{\zeta} + q\right| < q +$ beschrieben werden, wenn zur Abkürzung wieder $2^p - 1 = q$ gesetzt wir Jeder nicht zum Sterne gehörige Punkt $\zeta'$ hat unter Benutzung eine passenden Ecke $\zeta$ die Form $\zeta' = \varrho\zeta$ mit $\varrho \geqq 1$, und der Kreis $\left|\frac{z}{\zeta'} + q\right| < q +$ enthält den zuvor genannten Kreis als einen (für $\varrho > 1$ echten) Teil. Ge hört also ein bestimmter Punkt $z$ dem Gebiete $\mathfrak{B}_p$ an, so ist für *jede* nicht zum Sterne gehörigen Punkt $\zeta'$

$$\left|\frac{z}{\zeta'} + q\right| < q + 1$$

ist. Ist also bei festem $z$ in $\mathfrak{B}_p$ für einen Punkt $z'$

$$\left|\frac{z}{z'} + q\right| \geqq q + 1,$$

so ist $z'$ notwendig ein (innerer) Punkt des Sternes, also ein Punkt. de bei geradliniger Fortsetzung von 0 her für $f(z) = \Sigma c_n z^n$ ein reguläre Punkt ist. Die Punkte $t$, für die $|t + q| \geqq q + 1$ ist, bilden nun da Äußere des Kreises um $-q$ mit $q + 1$ und seinen Rand. Die Punkte $t$ für die

$$\left|\frac{1}{t} + q\right| \geqq q + 1$$

ist, bilden das Innere seines Spiegelbildes am Einheitskreise, also das Innere des Kreises über der Strecke von $-\frac{1}{2q+1}$ bis $+1$ als Durch messer, und dessen Rand. Die Punkte $z'$ also, für die bei festem $z_0$

$$\left|\frac{z_0}{z'} + q\right| \geqq q + 1$$

---

[20]) Während der Drucklegung dieser Arbeit habe ich Einsicht in die Korrekturbogen einer Arbeit von H. Rademacher, „*Über den Konvergenzbereich der Eulerschen Reihentransformation*," bekommen, die in den Sitzungsberichten der Berliner Mathematischen Gesellschaft erscheinen wird [Jahrg. 21 (1922), S. 16–24]. Hier ist im wesentlichen schon der obige Satz 2 — und in ganz ähnlicher Weise — bewiesen. Doch fehlt der Nachweis, daß die Bereiche $\mathfrak{B}_p$ die *genauen* Konvergenzbereiche sind, — eine Tatsache, die ich der vorliegenden Arbeit erst nach Kenntnisnahme der Note Rademachers und durch sie veranlaßt habe einfügen können (5. II. 22); auch ist die Verallgemeinerung von $p = 1$ auf $p > 1$ dort etwas anders vorgenommen als bei uns.

st, erfüllen das Innere des Kreises über der Strecke von $-\frac{z_0}{2q+1}$ bis $z_0$ ls Durchmesser, also das Innere des Kreises

(*) $$\left|\frac{z}{z_0}-\frac{q}{2q+1}\right| = \frac{q+1}{2q+1}$$

nd dessen Rand. Bei gegebenem $z_0$ in $\mathfrak{B}_p$ liegen also auf diesem Kreise $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}(z_0)$ und auf seinem Rande nur reguläre Punkte, und man kann aher einen zu $\mathfrak{K}$ konzentrischen Kreis $\mathfrak{K}'$ mit etwas größerem Radius so eichnen, daß auch er noch (einschließlich seines Randes) ganz im Innern es Sternes liegt. $\mathfrak{K}'$ umschließt dann insbesondere die Punkte 0 und $z_0$.

Durchläuft $t$ den Rand dieses Kreises $\mathfrak{K}'$, so ist also, weil $t$ dann tets außerhalb $\mathfrak{K}$ liegt,

$$\left|\frac{z_0}{t}+q\right| < q+1$$

nd es existiert also, wegen der Stetigkeit der linken Seite als Funktion on $t$, eine positive Zahl $\vartheta < 1$, so daß für alle jene $t$ sogar

$$\left|\frac{\frac{z_0}{t}+q}{q+1}\right| \leqq \vartheta < 1$$

leibt. Daher konvergiert die Reihe

$$\frac{1}{q+1}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\frac{z_0}{t}+q}{q+1}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{z_0}{t}}$$

ezüglich $t$ gleichmäßig und absolut längs $\mathfrak{K}'$, und es ist also der durch eradlinige Fortsetzung von 0 hei sich in $z_0$ ergebende Funktionswert

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\overset{(\mathfrak{K}')}{\int}\frac{f(t)}{t-z_0}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\overset{(\mathfrak{K}')}{\int}\frac{f(t)}{t}\,\frac{dt}{1-\frac{z_0}{t}}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{2\pi i}\overset{(\mathfrak{K}')}{\int}\frac{f(t)}{t}\,\frac{1}{q+1}\left(\frac{\frac{z_0}{t}+q}{q+1}\right)^k dt\right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(q+1)^{k+1}}\sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}q^{k-\nu}\left[\frac{1}{2\pi i}\overset{(\mathfrak{K}')}{\int}\frac{f(t)}{t^{\nu+1}}\,dt\right]z_0^{\nu}\right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{1}{(2^p)^{k+1}}\sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}(2^p-1)^{k-\nu}c_\nu z_0^{\nu}\right\}.$$

as ist aber genau die $p$-te Eulersche Transformierte von $\Sigma c_n z_0^n$, die iernach also konvergiert und $f(z_0)$ zur Summe hat. Da das (in der geschweiften Klammer stehende) allgemeine Glied dieser Reihe gemäß seiner

Entstehung dem Betrage nach $\leqq$ konst. $\vartheta^k$ ist, so ist die Konvergenz der Reihe sogar eine absolute.

Damit sind die in Satz 2 und folglich auch die in Satz 1 behaupteten *Konvergenz*tatsachen schon bewiesen. Es bleibt noch festzustellen, daß außerhalb unserer Bereiche die in Rede stehenden Reihen *divergieren*.

Liegt aber ein Punkt $z_1$ *außerhalb* $\mathfrak{B}_p$, so ist für mindestens *eine* Randstelle $\zeta_1$ des Sternes

$$\left|\frac{z_1}{\zeta_1}+q\right|>q+1,$$

was nach der oben ausgeführten geometrischen Deutung dieser Ungleichung besagt, daß $\zeta_1$ im Innern des Kreises $\mathfrak{K}(z_1)$, d. h. im Innern des Kreises

$$\left|\frac{z}{z_1}-\frac{q}{2q+1}\right|=\frac{q+1}{2q+1}$$

liegt. Wir beweisen nun den folgenden

Satz 3. *Wenn in einem Punkte $z_1$ die $p$-te Eulersche Transformierte von $f(z)=\Sigma c_n z^n$ konvergiert, so ist $f(z)$ im Innern des zugehörigen Kreises $\mathfrak{K}(z_1)$ regulär.*

Hiermit wäre in der Tat bewiesen, daß *außerhalb* von $\mathfrak{B}_p$ kein Konvergenzpunkt $z_1$ der $p$-ten Eulerschen Transformierten von $\Sigma c_n z^n$ liegen kann, da ja der zugehörige Kreis $\mathfrak{K}(z_1)$ sicher eine Randstelle $\zeta_1$ des Sternes in seinem Innern enthielte. Damit wäre dann der Beweis der Sätze 1 und 2 vollendet.

Beweis von Satz 3. Wir setzen $c_n z_1^n = a_n$, so daß $\Sigma a_n$ als $(Ep)$-summierbar vorausgesetzt wird, und betrachten die Potenzreihe

$$\psi(t)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n,$$

die sicher einen positiven Konvergenzradius hat, weil sie mit $\Sigma c_n (z_1 t)^n$ identisch ist. Die Voraussetzung besagt nun, daß mit

$$A_k=\left(\frac{1}{2^p}\right)^{k+1}\sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}q^{k-\nu}a_\nu, \qquad (q=2^p-1),$$

die Reihe $\Sigma A_k$ konvergiert. Aus

$$\sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}q^{k-\nu}a_\nu=(2^p)^{k+1}A_k,$$

d. h. aus

$$\sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}\frac{a_\nu}{q^\nu}=2^p\cdot\left(\frac{q+1}{q}\right)^k A_k$$

olgt aber sofort[21])

$$\frac{a_k}{q^k} = 2^p \cdot \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{k-\nu} \binom{k}{\nu} \left(\frac{q+1}{q}\right)^{\nu} A_\nu$$

der

$$a_n = (-1)^n \cdot 2^p q^n \cdot \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{\nu} \binom{n}{\nu} \left(\frac{q+1}{q}\right)^{\nu} A_\nu .$$

Das allgemeine Glied $A_k'$ der $p$-ten Eulerschen Transformierten von $\sum a_n t^n$ lautet nun

$$A_k' = A_k'(t) = \frac{1}{(2^p)^{k+1}} \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} q^{k-n} a_n t^n ,$$

welches, wenn wir den oben gefundenen Wert von $a_n$ einsetzen, die olgende Form erhält:

$$A_k' = \left(\frac{q}{q+1}\right)^k \sum_{n=0}^{k} \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{n+\nu} \binom{k}{n} \binom{n}{\nu} \left(\frac{q+1}{q}\right)^{\nu} A_\nu \cdot t^n ,$$

$$= \left(\frac{q}{q+1}\right)^k \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} \left[\sum_{\lambda=0}^{k-\nu} (-1)^{\lambda} \binom{k-\nu}{\lambda} t^{\lambda}\right] \left(\frac{q+1}{q}\right)^{\nu} A_\nu t^{\nu} ,$$

$$A_k' = \left(\frac{q}{q+1}\right)^k \cdot \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} (1-t)^{k-\nu} \left(\frac{q+1}{q}\right)^{\nu} A_\nu t^{\nu} .$$

Da nun $\Sigma A_\nu$ konvergieren soll, so sind die $A_\nu$ jedenfalls beschränkt; st etwa stets $|A_\nu| \leqq A$, so ist

$$|A_k'| \leqq A \cdot \left(\frac{q}{q+1}\right)^k \cdot \left[\frac{q+1}{q}|t| + |t-1|\right]^k ,$$

nd wir erhalten zunächst den folgenden

Satz 4: *Ist $\Sigma a_n$ eine beliebig vorgelegte $(Ep)$-summierbare Reihe, o ist die $p$-te Eulersche Transformierte der Reihe $\Sigma a_n t^n$ für jedes $t$, sogar absolut) konvergent, welches die Bedingung*

$$|t| + \left(1 - \frac{1}{2^p}\right)|t-1| < 1$$

*rfüllt*[22]).

[21]) Ist $\sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} b_\nu = B_k$ für $k = 0, 1, 2, \ldots,$ so ist $b_k = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{k-\nu} \binom{k}{\nu} B_\nu$.

[22]) Es ist nicht schwer, im Anschluß hieran die folgende Erweiterung des *Abel-chen Grenzwertsatzes* herzuleiten: *Ist $f(z) = \Sigma c_n z^n$ in $z_1$ $(Ep)$-summierbar zur umme $s$, so bleibt bei radialer (und unter gewissen Einschränkungen auch komplexer) nnäherung von $z \to z_1$ die Reihe $\Sigma c_n z^n$ $(Ep)$-summierbar und die Funktion $f(z)$ egulär, und es ist $\lim_{z \to z_1} f(z)$ vorhanden und $= s$.*

Wir fahren nun im im Beweise des Satzes 3 fort: Die Reihe $\Sigma A'_k(t)$ deren Glieder Polynome in $t$ sind und die sich in dem eben angegebenen Bereiche der $t$-Ebene — wir bezeichnen ihn mit $B_p$ — als konvergent erwiesen hat, ist ersichtlich in jedem abgeschlossenen echten Teilbereich von $B_p$ *gleichmäßig* konvergent und stellt also eine innerhalb $B_p$ reguläre analytische Funktion dar, die, da sie in der Umgebung des Nullpunktes mit $\psi(t)$ übereinstimmt, die analytische Fortsetzung von $\psi(t)$ in den Bereich $B_p$ liefert. $\psi(t)$ ist also in $B_p$ regulär. Da die diese Funktion in $B_p$ darstellende Reihe

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A'_k = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \left(\frac{q}{q+1}\right)^k \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} (1-t)^{k-\nu} \left(\frac{q+1}{q} t\right)^{\nu} A_\nu \right\}$$

noch konvergent bleibt, wenn man jeden Summanden der inneren Summe durch seinen absoluten Betrag ersetzt, so dürfen wir die Summationen vertauschen und haben auch

$$\psi(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left\{ A_\nu \left(\frac{q+1}{q} \frac{t}{1-t}\right)^{\nu} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{\nu} \left[\frac{q}{q+1}(1-t)\right]^k \right\}.$$

Jetzt ist die innere Summe

$$= \left[\frac{q}{q+1}(1-t)\right]^{\nu} \left[\frac{1}{1-\frac{q}{q+1}(1-t)}\right]^{\nu+1}$$

und also

$$\psi(t) = \frac{q+1}{1+qt} \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu \left[\frac{(q+1)t}{1+qt}\right]^{\nu}.$$

Diese Darstellung lehrt aber unmittelbar, daß $\psi(t)$ sogar regulär ist, solange

$$|(q+1)t| < |qt+1|$$

ist. Gehen wir auf die Bedeutung von $t$ zurück, so haben wir das Ergebnis, daß $\Sigma c_n z^n$ mindestens in demjenigen Bereiche der $z$-Ebene regulär ist, für den $t = \frac{z}{z_1}$ die eben genannte Bedingung erfüllt. Dieser Bereich besteht aber genau aus den inneren Punkten des in Satz 3 genannten Kreises $\mathfrak{K}(z_1)$. Damit sind die Beweise aller ausgesprochenen Sätze vollendet.

Bemerkung 1. Es genügt für die Gültigkeit von Satz 3, wenn die $A_n$ so beschaffen sind, daß $\Sigma A_n x^n$ den Radius 1 hat, daß also $\overline{\lim}\sqrt[n]{|A_n|} = 1$ ist, was wesentlich weniger erfordert als die Konvergenz von $\Sigma A_n$.

Bemerkung 2. Der Bereich $B_p$ ist das Blatt einer Pascalschen Schnecke mit einem Doppelpunkt in $+1$, deren Gleichung in Polarkoordinaten

$$r = 2\frac{\cos\varphi - \varepsilon}{1-\varepsilon^2}$$

utet, falls der Doppelpunkt $+1$ zum Pol gemacht und

$$1 - \frac{1}{2^p} = \varepsilon$$

setzt wird. — Einer freundlichen Mitteilung des Herrn H. Rademacher rdanke ich noch die Kenntnis der Tatsache, daß $B_p$ der *größte* Bereich r $t$-Ebene ist, für den allgemein aus der $(Ep)$-Summierbarkeit von $\Sigma a_n$ f die gleiche Eigenschaft von $\Sigma a_n t^n$ geschlossen werden kann.

## § 3.

## Die $(Ep)$-Summierbarkeit für beliebige $p$.

Da die Ordnung $p$ der Summierbarkeit nur im Exponenten von 2 uftritt, steht nichts im Wege, die bisherige Definition zur Erklärung der $E_p$)-Summierbarkeit für beliebige (reelle oder komplexe) Ordnungen zu enützen:

Definition. *Die Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *soll* $(Ep)$*-summierbar, die Folge der* eilsummen $s_0 = 0$, $s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}$ $(Ep)$*-limitierbar zum* Verte $s$ *heißen, wenn — was für einen festen reellen oder komplexen* Vert *auch* $p$ *haben mag — die Folge der Zahlen*

$$s_k^{(p)} = \frac{1}{(2^p)^k}\left[\binom{k}{0}(2^p-1)^k s_0 + \binom{k}{1}(2^p-1)^{k-1} s_1 + \ldots + \binom{k}{k} s_k\right],$$

der also, *falls zur Abkürzung* $\frac{1}{2^p} = \vartheta$, $-\frac{\log\vartheta}{\log 2} = p$ *gesetzt wird, die* olge *der Zahlen*

$$s_k^{(p)} = \sum_{\nu=0}^{k}\binom{k}{\nu}(1-\vartheta)^{k-\nu}\vartheta^\nu s_\nu$$

*it wachsendem* $k$ *gegen* $s$ *strebt*[23]).

Ähnlich wie bei allen andern Summierungsverfahren, bei denen verchiedene Ordnungen sich einführen lassen, empfiehlt es sich hier indessen, ie Ordnung auf reelle und nicht negative Werte zu beschränken. Und war aus dem einfachen Grunde, daß die Matrix, die der allgemeinen ransformation $p$-ter Ordnung entspricht und welche die Elemente

$$a_{kn} = \binom{k}{n}(1-\vartheta)^{k-n}\vartheta^n$$

[23]) Für $p = 0$ ist natürlich $s_k^{(p)} = s_k$ zu setzen.

hat, nach dem Toeplitzschen Satze[14]) nur dann regulär sein kann, wenn eine Konstante $M$ existiert, so daß für alle $k$

$$\sum_n |a_{kn}| < M$$

bleibt. Dies bedeutet hier aber, daß für alle $k$

$$\sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} |1-\vartheta|^{k-n} \cdot |\vartheta|^n = (|1-\vartheta| + |\vartheta|)^k < M$$

bleibt. Das ist aber dann und nur dann der Fall, wenn $|1-\vartheta| + |\vartheta| \leqq 1$ ist, was wiederum nur dann eintritt, wenn $\vartheta$ reell und zwischen 0 und 1 gelegen, d. h. die Ordnung $p \geqq 0$ ist. (Doch beachte man, daß z. B. die geometrische Reihe $\Sigma z^n$ in *jedem* von $+1$ verschiedenen Punkte $z$ der Ebene für ein passendes komplexes $p$ $(Ep)$-summierbar ist mit der Summe $\frac{1}{1-z}$).

Die Reihe $\Sigma a_n^{(p)}$, deren Teilsummen $a_0^{(p)} + a_1^{(p)} + \ldots + a_{n-1}^{(p)}$ die oben definierten Werte $s_n^{(p)}$ haben $(n \geqq 1;\ s_0^{(p)} = 0)$, läßt sich ebenfalls sofort hinschreiben, denn es ist

$$s_{n+1}^{(p)} - s_n^{(p)} = \vartheta^{n+1} \sum_{\nu=0}^{n+1} \binom{n+1}{\nu} \left(\frac{1-\vartheta}{\vartheta}\right)^{n+1-\nu} s_\nu - \vartheta^n \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \left(\frac{1-\vartheta}{\vartheta}\right)^{n-\nu} s_\nu$$

$$= \vartheta^{n+1} \left\{ \sum_{\nu=1}^{n+1} \binom{n}{\nu-1} \left(\frac{1-\vartheta}{\vartheta}\right)^{n+1-\nu} s_\nu - \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \left(\frac{1-\vartheta}{\vartheta}\right)^{n-\nu} s_\nu \right\},$$

also

$$a_n^{(p)} = \vartheta \cdot \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} (1-\vartheta)^{n-\nu} \vartheta^\nu \cdot a_\nu, \qquad \left(\vartheta = \frac{1}{2^p}\right).$$

Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(p)}$ mit diesen Gliedern, deren Bildung formal die gleiche ist, wie bei ganzzahligem $p$, bezeichnen wir auch jetzt als die $p$-te Eulersche Transformierte der Reihe $\Sigma a_n$.[23a]) Über diese transformierten Reihen gilt der

---

[23a]) Herr Th. Vahlen teilte mir (30. April 1922) folgende allgemeinere Form der Eulerschen Reihentransformation mit:

$$\frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \frac{a_3}{z^3} + \ldots = \frac{a_1}{t_1+z} + \frac{a_1 t_1 + a_2}{(t_1+z)(t_2+z)} + \frac{a_1 t_1 t_2 + a_2(t_1+t_2) + a_3}{(t_1+z)(t_2+z)(t_3+z)} + \ldots$$

mit der Mittelbildung

$$S_n = \frac{\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} s_0 + \begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} s_1 z + \ldots + \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} s_n z^n}{(t_1+z)(t_2+z)\ldots(t_n+z)},$$

bei der $s_n$ die Teilsummen der linksstehenden, $S_n$ die der rechtsstehenden Reihe und $\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} = \Sigma t_1 t_2 \ldots t_i$ die elementarsymmetrischen Funktionen der $t_1, t_2, \ldots, t_n$

Satz 1. *Die $q$-te Transformierte der $p$-ten Transformierten $\Sigma a_n^{(p)}$ ist die $(p+q)$-te Transformierte der ursprünglichen Reihe $\Sigma a_n$, wenn $p$ und $q$ irgendwelche Zahlen sind.*

Den Beweis kann man ganz leicht durch direkte Ausrechnung erringen; da er sich indessen noch unmittelbarer aus den etwas allgemeineren Betrachtungen des folgenden Paragraphen ergibt, wollen wir diese Rechnung hier unterdrücken. Aus diesem Satze folgt unmittelbar der weitere

Satz 2. *Ist die Reihe $\Sigma a_n$ für ein gewisses $p \geqq 0$ $(Ep)$-summierbar mit der Summe $s$, so ist sie auch für jedes größere $p$ und immer zur selben Summe $(Ep)$-summierbar.*

Und hieraus ergibt sich schließlich der

Satz 3. *Jeder divergenten Reihe $\Sigma a_n$, die überhaupt von einer gewissen Ordnung $(Ep)$-summierbar ist, entspricht ein eindeutig bestimmter Index $p_0$ ihrer $E$-Summierbarkeit derart, daß die Reihe zwar für jedes $p > p_0$, aber für kein $p < p_0$ $(Ep)$-summierbar ist.*

Da die als Beispiel im vorigen Paragraphen durchgeführten Betrachtungen über die $(Ep)$-Summierbarkeit der geometrischen Reihe wörtlich bestehen bleiben, wenn $p$ irgendeine positive reelle Zahl ist, so behalten auch die Betrachtungen über die $(Ep)$-Summierbarkeit beliebiger Potenzreihen (mit positivem, endlichem Radius) unter diesen allgemeineren Voraussetzungen ihre Gültigkeit. Insbesondere sind hiernach die Bereiche $\mathfrak{B}_p$ für *jedes* reelle $p \geqq 0$ als definiert anzusehen, und diese $\mathfrak{B}_p$ schmiegen sich, wenn $p$ *stetig* wachsend $\to +\infty$ strebt, dem Borelschen Summationspolygon $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_\infty$ stetig an.

---

ind. Den Beweis liefert V. vermittels der Rekursionsformel $\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix} = t_n \begin{bmatrix} n-1 \\ i-1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ i \end{bmatrix}$ nd durch Addition der beiden Identitäten:

$$\left(\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} s_1 z + \ldots + \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} s_n z^n\right) - \left(\begin{bmatrix} n-1 \\ n-1 \end{bmatrix} s_0 + \begin{bmatrix} n-1 \\ n-2 \end{bmatrix} s_1 z + \ldots + \begin{bmatrix} n-1 \\ 0 \end{bmatrix} s_{n-1} z^{n-1}\right) t_n$$
$$= \begin{bmatrix} n-1 \\ n-1 \end{bmatrix} s_1 z + \begin{bmatrix} n-1 \\ n-2 \end{bmatrix} s_2 z^2 + \ldots + \begin{bmatrix} n-1 \\ 0 \end{bmatrix} s_n z^n$$

$$s_1 z + \begin{bmatrix} n-1 \\ n-2 \end{bmatrix} s_2 z^2 + \ldots + \begin{bmatrix} n-1 \\ 0 \end{bmatrix} s_n z^n\right) - \left(\begin{bmatrix} n-1 \\ n-1 \end{bmatrix} s_0 + \begin{bmatrix} n-1 \\ n-2 \end{bmatrix} s_1 z + \ldots + \begin{bmatrix} n-1 \\ 0 \end{bmatrix} s_{n-1} z^{n-1}\right) z$$
$$= \begin{bmatrix} n-1 \\ n-1 \end{bmatrix} a_1 + \begin{bmatrix} n-1 \\ n-2 \end{bmatrix} a_2 + \ldots + \begin{bmatrix} n-1 \\ 0 \end{bmatrix} a_n .$$

ie ist regulär im Sinne der Fußnote [2]), falls $z$ und alle $t_i$ positiv sind und zwei ositive Zahlen $\tau$ und $t$ existieren, so daß $\tau \leqq t_i \leqq t < \tau + z$ ist.

## § 4.

## Die Hausdorffsche Diagonalmatrix.

Aus den Untersuchungen von W. A. Hurwitz und L. L. Silverman[24] und von F. Hausdorff[25]) geht hervor, daß alle diejenigen auf Anwendung von linearen Transformationen $(a_{kn})$ beruhenden Summierungsverfahren in natürlicher Weise zusammengehören, bei denen die Matrix $A = (a_{kn})$ *vertauschbar* ist mit der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & . & . \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & . & . \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{pmatrix},$$

die der $(C\,1)$-Summierbarkeit, also der Bildung der gewöhnlichen arithmetrischen Mittel erster Ordnung entspricht. Notwendig und hinreichend dazu ist, wie dort gezeigt wird und aus dem folgenden auch unmittelbar zu ersehen ist, daß die folgende Bedingung erfüllt ist:

Bedeutet $D$ die der Differenzenbildung entsprechende Matrix

$$D = (d_{kn}) \quad \text{mit} \quad d_{kn} = (-1)^n \binom{k}{n},$$[26])

also die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & . & . \\ 1 & -1 & 0 & 0 & . & . \\ 1 & -2 & 1 & 0 & . & . \\ 1 & -3 & 3 & -1 & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{pmatrix},$$

so ist $A$ dann und nur dann mit $M$ vertauschbar, wenn $DAD^{-1}$ eine *Diagonalmatrix* ist. Deren Elemente sollen dann $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \ldots$ genannt werden. Die Gesamtheit aller derjenigen Summierungsverfahren, die diese Bedingungen erfüllen und wie bisher den Forderungen I und II (§ 1) genügen, wollen wir als *Klasse* $\mathfrak{A}$ *der Summierungsverfahren* zusammenfassen. Die zugehörigen Matrizen sind dann natürlich paarweise vertauschbar.

---

[24]) *On the consistency and equivalence of certain definitions of summability*, Transactions of the American Mathematical Society **18** (1917), S. 1–20.

[25]) *Summationsmethoden und Momentfolgen* I, Mathematische Zeitschrift **9** (1921), S. 74–109.

[26]) Es ist $\Delta^k b_0 = \sum_{\nu=0}^{k} d_{k\nu} b_\nu$, so daß $D(b)$ die Folge der Differenzen $b_0, \Delta b_0, \Delta^2 b_0, \ldots$ liefert.

Ist nun $s' = A(s)$ und wird $D(s) = t$, $D(s') = t'$ gesetzt, werden also att der Folgen $(s_n)$ und $(s'_n)$ die Folgen ihrer Differenzen $\Delta^n s_0 = t_n$ d $\Delta^n s'_0 = t'_n$ eingeführt, so ist

$$t' = D(s') = DA(s) = DAD^{-1}(t),$$

so einfach

$$t'_k = \mu_k t_k. \tag{4}$$

lle mit $M$ vertauschbaren Matrizen $A$, und nur diese, haben also die genschaft, daß die durch sie bewirkte lineare Transformation $s' = A(s)$ en durch die letzte Gleichung dargestellten rein multiplikativen Charakter kommt, wenn man statt der $s_n$ und $s'_n$ die Folge ihrer Differenzen $^k s_0$ und $\Delta^k s'_0$ betrachtet.

*Man stellt leicht fest, daß unsere Eulerschen Matrizen $E^{(p)}$ zu esen mit $M$ vertauschbaren Matrizen gehören und daß die zugehörigen Multiplikatoren $\mu_k$ die Werte $\left(\frac{1}{2^p}\right)^k = \vartheta^k$ haben.*

Beweis. Nach den Vorbemerkungen genügt es zu zeigen, daß $E^{(p)}D^{-1}$ eine Diagonalmatrix ist[27]). Das Element $(k, n)$ in $D$ bzw. $^{(p)}$ hat den Wert

$$d_{kn} = (-1)^n \binom{k}{n} \quad \text{bzw.} \quad e^{(p)}_{kn} = \binom{k}{n}(1-\vartheta)^{k-n}\vartheta^n;$$

olglich hat das Element $(k, n)$ im Produkt $DE^{(p)}$ den Wert

$$\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^\nu \binom{k}{\nu}\binom{\nu}{n}(1-\vartheta)^{\nu-n}\vartheta^n = (-1)^n\binom{k}{n}\vartheta^k.$$

n $DE^{(p)}D^{-1}$ hat dann, da $D^{-1} = D$[28]) ist, das Element $(k, n)$ den Wert

$$\vartheta^k \cdot \sum_{\nu=0}^{k}(-1)^\nu\binom{k}{\nu}(-1)^n\binom{\nu}{n} = \begin{cases} \vartheta^k, & \text{falls } n = k, \\ 0 & \text{in allen anderen Fällen,} \end{cases}$$

omit der Beweis schon vollendet ist.

[27]) Daß $DMD^{-1}$ eine Diagonalmatrix ist, rechnet man ganz leicht direkt us: Das Element $(k, n)$ in $DM$ ist

$$= \sum_{\lambda=n}^{k}(-1)^\lambda\binom{k}{\lambda}\frac{1}{\lambda+1} = \frac{1}{k+1}\sum_{\lambda=n}^{k}(-1)^\lambda\binom{k+1}{\lambda+1} = \frac{(-1)^n}{k+1}\binom{k}{n},$$

nd folglich das Element $(k, n)$ in $DMD^{-1}$

$$= \sum_{\nu=0}^{k}\frac{(-1)^\nu}{k+1}\binom{k}{\nu}(-1)^n\binom{\nu}{n} = \frac{1}{k+1}\sum_{\nu=n}^{k}(-1)^{n+\nu}\binom{k}{n}\binom{k-n}{\nu-n}$$

$$= \frac{1}{k+1}\binom{k}{n}\sum_{\lambda=0}^{k-n}(-1)^\lambda\binom{k-n}{\lambda} = \begin{cases} \frac{1}{k+1} & \text{für } n = k \\ 0 & \text{für } n \neq k, \end{cases} \quad \text{w. z. b. w.}$$

[28]) Denn die $n$-te Differenz des Anfangsgliedes in der Folge $b_0, \Delta b_0, \Delta^2 b_0, \ldots$ t wieder $b_n$.

Da sich hier speziell für ganzzahlige $p$ die Multiplikatoren $\left(\frac{1}{2^p}\right)^k$ ergeben, so wäre man an dieser Stelle noch einmal mit einer gewisse Notwendigkeit zur Erweiterung der $(Ep)$-Summierbarkeit auf beliebige geführt worden.

Da hiernach die Diagonalmatrix $DE^{(p)}D^{-1}\cdot DE^{(q)}D^{-1}$ in de Diagonale dieselben Elemente

$$\left(\frac{1}{2^{p+q}}\right)^k$$

hat wie die Diagonalmatrix $DE^{(p+q)}D^{-1}$, so ergibt sich hier der unmittel barste Beweis für den Satz 1 des vorigen Paragraphen:

$$E^{(q)}E^{(p)} = E^{(p)}E^{(q)} = E^{(p+q)},$$

und aus ihm, da $E^{(q)}$ für $q \geqq 0$ regulär ist, der Beweis der Sätze 2 und jenes Paragraphen.

## § 5.

## Unvergleichbarkeit des Eulerschen mit dem Cesàroschen Summierungsverfahren.

Die Tatsache, daß jedes der Summierungsverfahren der im vorigen Paragraphen genannten natürlichen Klasse durch eine *einfache* Folge, nämlich die zugehörigen Multiplikatoren $\mu_k$ charakterisiert werden kann, legt die Vermutung nahe, daß die Wirkung eines solchen Verfahrens oder die Größe seines Konvergenzfeldes sich in einfacher Weise in dem infinitären Verhalten der $\mu_k$ widerspiegeln muß. Innerhalb gewisser Grenzen entspricht in der Tat auch *kleineren* (d. h. schneller $\to 0$ strebenden) $\mu_k$ ein *größeres* Konvergenzfeld des darauf gegründeten Summierungsverfahrens. Doch gilt dies keineswegs generell. Insbesondere zeigte schon F. Hausdorff einerseits von den Hölderschen Matrizen, deren Multiplikatoren die Werte

$$\frac{1}{(k+1)^p}$$

haben und deren Konvergenzfeld mit dem der $(Cp)$-Summierbarkeit identisch ist, und andererseits von denjenigen Matrizen, deren Multiplikatoren die Werte $\vartheta^k$ haben $(0 < \vartheta < 1)$, daß diese *nicht*, wie man erwarten möchte, in der Beziehung stehen, daß das Konvergenzfeld der ersteren stets in dem der letzteren enthalten ist, sondern daß beide vielmehr miteinander *unvergleichbar* sind[29]). Da er dies aus sehr viel allgemeineren Betrach-

[29]) Bei der Anwendung auf Potenzreihen $\Sigma c_n z^n$ dagegen hatte sich in § 2 ergeben, daß das Konvergenz*gebiet* des Eulerschen Verfahrens in der $z$-Ebene stets dasjenige des Cesàroschen in sich enthält. Denn jenes besitzt im allgemeinen

ngen erschließt und er auch den Zusammenhang der letzterwähnten atrizen mit dem Eulerschen Summierungsverfahren nicht erwähnt, so t es vielleicht nicht überflüssig, hier diese Tatsache durch ein konkretes eispiel zu belegen. Wir formulieren die Behauptung zu dem folgenden

Satz 1. *Es gibt Reihen, welche* $(E1)$*-summierbar sind, ohne* $(Cp)$*-ummierbar zu sein; und es gibt andrerseits Reihen, welche* $(C1)$*-summierbar sind, ohne* $(Ep)$*-summierbar zu sein, wie groß in beiden Fällen uch* $p$ *genommen werden möge.*

Beweis. Die erste Hälfte des Satzes ist schon durch die geometrische eihe $\Sigma z^n$ belegt, welche z. B. für $z = -2$ noch $(E1)$-summierbar ist, ährend sich die Cesàrosche Summierbarkeit jedweder Potenzreihe beannntlich höchstens noch auf den Rand des Konvergenzkreises erstreckt. ie zweite Hälfte läßt sich durch das folgende Beispiel erhärten: Ich ehaupte, daß diejenige Reihe, deren Teilsummen $s_0, s_1, \ldots$ der Reihe ich die Werte

$$0, \overbrace{1, 1, 1,}^{3} \overbrace{0, \ldots, 0,}^{5} \overbrace{1, \ldots, 1,}^{7} \overbrace{0, \ldots, 0,}^{9} \overbrace{1, \ldots,}^{11} \ldots$$

aben[30]), zwar $(C1)$-summierbar ist — und zwar mit dem Werte $\frac{1}{2}$ —, aß sie aber nicht $(Ep)$-summierbar ist.

In der Tat werden die höchsten Werte der arithmetischen Mittel $\frac{s_1 + \ldots + s_n}{n-1}$ stets am Ende einer 1-Gruppe, die tiefsten am Ende einer Gruppe angenommen. Die erstgenannten Werte sind für das Endglied r Gruppe mit $(4m-1)$ Einsen

$$= \frac{2m^2 + m}{(2m)^2};$$

e zweitgenannten Werte für das Endglied der Gruppe mit $(4m+1)$ ullen

$$= \frac{2m^2 + m}{(2m+1)^2},$$

as mit wachsendem $m$ beides $\to \frac{1}{2}$ strebt. Die hingeschriebene Folge t also $(C1)$-limitierbar mit dem Werte $\frac{1}{2}$.

Um zu zeigen, daß sie nicht $(Ep)$-limitierbar ist, wie groß auch $p$ ewählt werden mag, benutzen wir die folgende aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung her bekannte asymptotische Abschätzung:

---

ußerhalb des Konvergenzkreises von $\Sigma c_n z^n$ gelegene Punkte, dieses niemals. Nur *Randpunkten* des Konvergenzkreises kann also das Cesàrosche Verfahren mehr isten als das Eulersche.

[30]) Die übergesetzte kleine Ziffer soll natürlich angeben, wie oft jedesmal die 0 w. die 1 hintereinander zu setzen ist.

*Ist $\vartheta$ ein gegebener positiver echter Bruch, so gilt für $n \to \infty$ die asymptotische Gleichung*

$$(\vartheta) \qquad \sum_{\nu} \binom{n}{\nu} (1-\vartheta)^{n-\nu} \vartheta^{\nu} \cong \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{\vartheta(1-\vartheta)}}} e^{-t^2} dt,$$

*wenn in der linksstehenden Summe $\nu$ alle diejenigen ganzen Zahlen durchläuft, die zwischen*

$$n\vartheta - \sqrt{\vartheta(1-\vartheta)} \cdot \sqrt{n} \quad \text{und} \quad n\vartheta + \sqrt{\vartheta(1-\vartheta)} \cdot \sqrt{n}$$

*liegen. Hierbei ist der numerische Wert der rechten Seite $= 0{,}682\ldots > \frac{2}{3}$.*[31]

Um nun zu beweisen, daß unsere Folge $(s_n)$ nicht $(Ep)$-limitierbar ist, haben wir nur zu zeigen, daß, welchen positiven echten Bruch auch $\vartheta \left(= \frac{1}{2^p}\right)$ bedeuten mag, die Summe

$$(S) \qquad \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} (1-\vartheta)^{n-\nu} \vartheta^{\nu} s_{\nu}$$

mit wachsendem $n$ keinem Grenzwert zustrebt. Wir werden zeigen, daß sie für unendlich viele $n$ größer als $\frac{2}{3}$ und für unendlich viele andere kleiner als $\frac{1}{3}$ ist.

Dazu wählen wir fürs erste $n$ so, daß das Glied $s_k$ mit $k = [n\vartheta]$ gerade die mittelste 1 einer 1-Gruppe ist, — und solcher Werte von $n$ gibt es unendlich viele.

Hat eine dieser Gruppen $2m+1$ Einsen, so ist

$$[n\vartheta] = m^2 + m,$$

also

$$m \cong \sqrt{n\vartheta} > \sqrt{\vartheta(1-\vartheta)} \cdot \sqrt{n}.$$

Lassen wir also in der Summe (S) den Index $\nu$ nur die bei der Abschätzungsformel $(\vartheta)$ genannten Werte durchlaufen, so ist für diese $\nu$ stets $s_\nu = 1$, für die andern $\nu$ aber jedenfalls $s_\nu \geqq 0$. Folglich ist für alle hinreichend großen $n$ der bezeichneten Art

$$\sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} (1-\vartheta)^{n-\nu} \vartheta^{\nu} s_{\nu} > \frac{2}{3}.$$

Wählen wir andererseits $n$ so, daß das Glied $s_k$ mit $k = [n\vartheta]$ gerade die mittelste 0 einer 0-Gruppe ist, — und auch solcher Werte von $n$ gibt es unendlich viele, — so folgt durch die komplementäre Betrachtung, daß für solche $n$ unsere Summe $< \frac{1}{3}$ ist. Sie strebt also bei $n \to \infty$

[31]) Einen Beweis findet man in jedem Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung, z. B. S. 34ff. desjenigen von A. A. Markoff.

einem Grenzwerte zu: *Für kein p ist die behandelte Folge* $(Ep)$*-limierbar*. Damit ist der Satz in allen Teilen bewiesen.

In einer ganz anderen Richtung liegt die Frage, die sich hier noch unmittelbar anschließt, ob nämlich das Cesàrosche und das Eulersche Verfahren, *falls ein und dieselbe Reihe* $\Sigma a_n$ *dem Konvergenzfeld von beiden angehört*, dieser Reihe beide *dieselbe* Summe zuordnen. Daß diese Frage zu bejahen ist, besagt der folgende allgemeine Satz, der von einer neuen Seite her die starke Zusammengehörigkeit der zur *Klasse* $\mathfrak{A}$ vereinigten Summierungsverfahren (§ 4) beleuchtet:

Satz 2. *Alle Summierungsverfahren der Klasse* $\mathfrak{A}$, *durch die ein und dieselbe Reihe sich als summierbar erweist, ordnen dieser Reihe sämtlich dieselbe Summe zu.*

Beweis. Es seien $A'$ und $A''$ die Matrizen zweier Summierungsverfahren der Klasse $\mathfrak{A}$, durch die eine vorgelegte Reihe $\Sigma a_n$ mit den Teilsummen $s_n$ summierbar ist. Es seien $\alpha'$ und $\alpha''$ die dadurch erhaltenen Summen, d. h. die durch die linearen Transformationen

$$s' = A'(s) \quad \text{bzw.} \quad s'' = A''(s)$$

erhaltenen Folgen $(s'_n)$ bzw. $(s''_n)$ konvergieren gegen die genannten Grenzwerte. Da nun beide Verfahren die Permanenzbedingung I (§ 1) erfüllen, so konvergieren auch die durch die Transformationen

$$t' = A''(s') \quad \text{bzw.} \quad t'' = A'(s'')$$

definierten Folgen $(t'_n)$ und $(t''_n)$ gegen $\alpha'$ bzw. $\alpha''$. Diese letztgenannten Folgen sind aber *identisch*; denn da je zwei Operationen der Klasse $\mathfrak{A}$ miteinander vertauschbar sind, ist

$$t' = A''A'(s) = A'A''(s) = t''.$$

Damit ist schon alles bewiesen[32]).

Königsberg i. Pr., den 24. Dezember 1921.

[32]) Da es bei dem Beweise dieses Satzes weniger darauf ankam, daß $A'A''$ mit $A''A'$ *identisch* ist, als darauf, daß beide das gleiche Konvergenzfeld haben (genauer, daß beide „normiert äquivalent" sind, d. h. daß jede Folge $(s_n)$, die durch die Transformation $A'A''$ in eine zum Grenzwert $s$ konvergierende Folge verwandelt wird, auch durch $A''A'$ in eine zu *demselben* Grenzwert konvergierende Folge verwandelt wird und umgekehrt), so ist es sinngemäß in die Klasse $\mathfrak{A}$ unserer Summierungsverfahren alle diejenigen Matrizen aufzunehmen, die paarweis die eben genannte Eigenschaft besitzen.

(Eingegangen am 27. Dezember 1921.)

# Concerning Continuous Curves in the Plane.

By

Robert L. Moore in Austin (Texas. U. S. A.).

Several years ago I showed[1]) that every two points of a continuou curve $M$ can be joined by a simple continuous arc which is a subset o $M$. In the present paper I will establish the more general result expresse below in the statement of Theorem 1. It will also be shown that if, i a plane, two points are separated by a continuous curve $M$ then the are separated by a simple closed curve which is a subset of $M$.

Before proceeding to the proofs of these theorems, I will defin certain of the terms to be employed.

The term *connected*, as applied to point-sets which are not necessaril closed, has been used by different authors with different meanings Lennes[2]) calls a point-set connected if it can not be expressed as th sum of two point-sets neither of which contains a limit point[3]) of th other. In the present paper such a set will be said to be *connected i the weak sense*. A point-set $M$ will be said to be *connected in th strong sense* if for every two points $A$ and $B$ belonging to $M$ there exists a closed subset of $M$ which contains $A$ and $B$ and is connected in the weak sense. The point-set $K$ will be said to be an *open* subse

[1]) R. L. Moore, A theorem concerning continuous curves, Bull. Amer. Math Soc., 2d. series, **23** (Febr. 1917), S. 233–236. See also H. Tietze, Über stetig Kurven, Jordansche Kurvenbögen und geschlossene Jordansche Kurven, Math Zeitschr. **5** (1919), S. 284–291; and S. Mazurkiewicz, Sur les lignes de Jordan Fundamenta Mathematicae **1** (1920), S. 166–209. In this article, Mazurkiewicz establishes numerous results and indicates that some of them were published earlier in a journa (C. R. Soc. Sc. Varsovie) to which I do not at present have access.

[2]) N. J. Lennes, Curves in non-metrical analysis situs with an application i the calculus of variations, American Journal of Mathematics **33** (1911), S. 287–326

[3]) A point is said to be a limit point of a point-set $M$ if every circle whic encloses $P$ encloses at least one point of $M$ distinct from $P$.

f the point-set $M$, or to be open with respect to $M$, if $K$ is a subset f $M$ and $M - K$ is either vacuous or closed.

The truth of Theorem 1 below is not a consequence of the fact that continuous curve is closed and connected[4]) and that every two of its oints can be joined by a simple continuous arc lying wholly in it. To ee this, consider the following example. Let $M$ denote the point-set omposed of a countable infinity of straight line-intervals $OA, OA_1, A_2, OA_3, \ldots$, where the points $A, A_1, A_2, A_3, \ldots$ are all on a given ircle with center at $O$ and where, for every $n$, the distance from $A_n$ o $A$ is equal to $1/n$. Let $B$ and $C$ denote two distinct points between and $A$, let $H$ denote the straight line interval $BC$ and let $K$ denote he point-set $M - H$. The closed connected point-set $M$ has the property hat every two of its points can be joined by a simple continuous arc ying wholly in it. But, though $K$ is an open subset of $M$ which is onnected in the weak sense, not every two points of $K$ can be joined y a simple continuous arc that lies wholly in $K$. Furthermore, $K$ is ot connected in the strong sense.

Theorem 1. *If an open subset of a continuous curve $M$ is connected in the weak sense it is also connected in the strong sense, and indeed if $K$ is an open subset of $M$, and $A$ and $B$ are two points which lie in a subset of $K$ which is connected in the weak sense, then $A$ and $B$ can be joined by a simple continuous arc which lies wholly in $K$.*

Proof. Let $H$ denote the point-set $M$-$K$. Since $H$ is closed, if $P$ s a point of $K$ and $n$ is a positive integer there exists a circle $J_{nP}$ with enter at $P$ and with radius less than $1/n$ which encloses no point of $H$. et $K_{nP}$ denote the set of all points $[X]$ such that $X$ and $P$ lie together n a connected subset of $M$ which lies wholly within $J_{nP}$. Let every uch $K_{nP}$ be called a region and let the term region be not applied to ny point-set which is not a $K_{nP}$ for some positive integer $n$, some oint $P$ of $K$ and some $J_{nP}$. The continuous curve $M$ is connected im kleinen[5]). Hence for every $P$, $n$ and $K_{nP}$ there exists a circle with center t $P$ such that every point of $K$ within this circle belongs to $K_{nP}$. Also, f $X$ is any point belonging to $K_{nP}$, there exists a positive number $\delta$ uch that, for every integer $m$ greater than $\delta$, $K_{mX}$ is a subset of $K_{nP}$. With the help of these facts it is easy to see that (1) a point $X$ of $K$

[4]) Obviously every point-set which is connected in the strong sense is also onnected in the weak sense and a closed point-set which is connected in the weak ense is also connected in the strong sense. It is accordingly allowable to speak of "closed, connected point-set" without specifying in which sense the term connected s used.

[5]) Cf Hans Hahn and S. Mazurkiewicz, loc. cit.

is a limit point of a point-set $T$ belonging to $K$ if, and only if, every region that contains $X$ contains a point of $T$ distinct from $X$, (2) if the space $S$ of my paper on the Foundations of Plane Analysis Situs[6]) be interpreted to mean the set of points $K$, and the term region used therein be interpreted as indicated above, then Axioms 1, 2 and 4 of that paper are all satisfied. But Theorem 15 of F. A. is proved on the basis of Axioms 1, 2 and 4. Furthermore, if $A$ and $B$ are two points which lie in a subset of $K$ which is connected in the weak sense then $K$ contains a subset $D$ which contains $A$ and $B$, is connected in the weak sense and has the property that if $Y$ is any point of $D$ then there exists a region that contains $Y$ and lies wholly in $D$. Hence, by Theorem 15 $D$ (and therefore $K$) contains a point-set containing $A$ and $B$ which is bounded, closed and connected and contains no proper connected subset that contains both $A$ and $B$. Of course the words closed and connected are to be interpreted here as having the meaning assigned to them in F. A. Since in F. A. a closed point-set is defined in the usual manner as a point-set which contains all its limit points and connectedness is defined in the manner indicated above (for connectedness in the weak sense) in terms of point and limit point, it is clear that the significance to be attached to the words closed and connected (and therefore to the phrase simple continuous arc), as used here, depends on the sense in which the phrase limit point of a point-set is used in F. A. A point $X$ is there defined as the limit point of a point-set $T$ if, and only if, every region containing $X$ contains at least one point of $T$ distinct from $X$. It follows from (1) above that when the terms point and region used in F. A. are given the present interpretation then the phrase *limit point of a point-set* as used in F. A. takes on its ordinary meaning and thus the phrase *simple continuous arc* takes on its ordinary meaning. The truth of Theorem 1 is therefore established.

Definitions. A *domain* is a connected[7]) point-set $K$ such that if $P$ is any point of $K$ then $P$ lies within some circle whose interior is a subset of $K$. The *boundary* of a point-set $M$ is the set of all points $[X]$ such that every circle which encloses $X$ encloses at least one point of $M$ and at least one point which does not belong to $M$. A point-set $M$ is said to be *limited*, or *bounded*, if there exists a circle which encloses both $M$ and its boundary. If $M$ is a limited point-set and $C$ is a circle which encloses both $M$ and its boundary then the outer boundary of $M$

[6]) Transactions of the American Mathematical Society 17 (1916), S. 131–164. This paper will be referred to as F. A.

[7]) Hereafter in this paper a set of points will be said to be connected if it is connected in the weak sense.

s the boundary of the point-set composed of all points $[X]$ such that $X$ an be joined to some point of $C$ by a simple continuous arc which con- ains no point of $M$ or of its boundary. The outer boundary of $M$ ccording to this definition is evidently a subset of the boundary of $M$. 'he exterior of a domain $R$ is the complement of $R+\beta$ where $\beta$ is the oundary of $R$. A limited domain $R$ is said to be simply connected if $R$ ontains the interior of every simple closed curve which lies wholly in $R$.

Lemma 1. *If a limited domain $R$ has a connected exterior and very point of the boundary of $R$ is a limit point of the exterior of $R$ hen $R$ contains every limited point-set whose boundary is a subset of $R$.*

Proof. Let $\beta$ and $E$ respectively denote the boundary and the xterior of $R$ and suppose that $K$ is a limited point-set which is not a ubset of $R$. Let $\bar{K}$ denote the set of all those points of $K$ which be- ong to $\beta+E$. Since $K$ and $R$ are limited, the point-set $(\beta+E)-\bar{K}$ xists. But since $E$ is connected and every point of $\beta$ is a limit point f $E$, therefore $\beta+E$ is connected. Hence one of the sets $\bar{K}$ and $\beta+E)-\bar{K}$ contains at least one limit point of the other one. Every uch point is a boundary point of $K$. Thus if $K$ is not a subset of $R$, ts boundary is not a subset of $R$. Lemma 1 is therefore established.

Lemma 2. *The interior $I$ of a simple closed curve $J$ contains very limited point-set whose boundary lies in $I$.*

The truth of Lemma 2 follows from Lemma 1 and the fact that he exterior of $I$ is connected and that every point of $J$ is a limit point f the exterior of $I$.

Theorem 2. *In order that the limited domain $R$ should be simply onnected it is necessary and sufficient that the boundary of $R$ should e connected.*

Proof. This condition is necessary. For suppose, on the contrary, hat there exists a simply connected domain $R$ whose boundary $\beta$ is not onnected. Then $\beta$ is the sum of two mutually exclusive closed point- ets $\beta_1$ and $\beta_2$. Hence[8]) there exists a simple closed curve which lies n $R$ and separates $\beta_1$ from $\beta_2$. Thus the interior of $J$ contains points f $\beta$ and is therefore not a subset of $R$, contrary to the hypothesis hat $R$ is simply connected.

The condition in question is also sufficient. For suppose, on the ontrary, that there exists a limited domain $R$ which has a connected oundary $\beta$ and contains a simple closed curve $J$ whose interior is not subset of $R$. Since $J$ itself is a subset of $R$ and every point of $J$ is

[8]) Cf. F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Veit and Co., Leipzig 1914, . 344, VII.

a limit point of $I$, the interior of $J$, therefore $R$ contains at least or point of $I$. Since the connected point-set $I$ contains a point of $R$ an a point not belonging to $R$, it must contain a point of $\beta$, the boundar of $R$. Since $\beta$ is a connected point-set which contains a point of but no point of $J$, the boundary of $I$, therefore $\beta$ must lie wholly in and therefore, by Lemma 2, $R$ is a subset of $I$. But this is contrar to the hypothesis that $R$ contains $J$. Thus the supposition that th condition of Theorem 2 is not sufficient has led to a contradiction.

Theorem 3. *If $R$ is a limited domain and $\gamma$ is the outher boundary of $R$ then $\gamma$ is the complete boundary of some limited domai which contains $R$.*

Proof. Let $P$ denote a point of $R$ and let $K$ denote the set of a points $[X]$ such that $X$ can be joined to $P$ by a simple continuous ar which contains no point of $\gamma$. Suppose $F$ is a point of the boundar of $K$. If $F$ does not belong to $\gamma$ there exists a circle $\alpha$ enclosing but neither containing nor enclosing any point of $\gamma$. The circle $\alpha$ en closes a point $Y$ which belongs to $K$. There is a simple continuou arc $PY$ lying in $K$. There is a simple continuous arc $YF$ lying within and therefore containing no point of $\gamma$. The point-set $PY + YF$ contain a simple continuous arc $PF$ which contains no point of $\gamma$. Hence belongs to $K$ and so does every other point within $\alpha$. Hence $F$ is no a point of the boundary of $K$. Thus the hypothesis that not every poin of the boundary of $K$ belongs to $\gamma$ has led to a contradiction. But every point of $\gamma$ is a boundary point of $R$ and therefore of $K$. Hence is the complete boundary of the domain $K$.

That the domain $K$ is limited may be proved as follows. Since is limited there exists a circle $C$ which encloses both $R$ and its boundary Suppose that $K$ contains a point $Z$ without $C$. Then there exists simple continuous are $PZ$ which contains no point of $\gamma$. Since $P$ i in $R$ and $Z$ is not in $R$, there exists on $PZ$ at least one point of $\beta$ the boundary of $R$. Hence, since $\beta$ is closed, there is a last point of on $PZ$. Call this point $W$. The point $W$ evidently belongs to $\gamma$. Thus the supposition that $K$ contains a point without $C$ leads to a contradiction. It follows that $K$ is limited.

Theorem 4. *If the boundary $\beta$ of a limited domain $R$ is a continuous curve then the outer boundary of $R$ is a simple closed curve.*

Proof. Let $C$ denote a circle which encloses $R$ and its boundary By Theorem 3, $\alpha$, the outer boundary of $R$, is the complete boundary of some limited domain $K$ which contains $R$ but contains no point i common with $E$, the unlimited point-set which consists of all points $[P$

uch that $P$ can be joined to a point of $C$ by a simple continuous arc hich contains no point of $\beta$. By definition, $\alpha$ is the complete boundary f $E$. Since $E$ is one of the domains complementary to the continuous urve $\beta$, it follows by a theorem due to Schoenflies[9]), that every oint of $\alpha$ is „allseitig erreichbar" with respect to $E$. Hence, by a heorem due to Miss Torhorst[10]), $\alpha$ is itself a continuous curve. It llows by the above mentioned theorem of Schoenflies, that if $P$ is ny point in $E$, or in $K$, and $Z$ is any point of $\alpha$ then there exists a simple ontinuous arc $PK$ which contains, in common with $\alpha$, only the point $P$.

Suppose now that $A$ and $B$ are any two points of $\alpha$. Then there xists a simple continuous arc $AOB$ which is a subset of $\alpha$. Let $P_1$ nd $P_2$ denote points belonging to $K$ and $E$ respectively. There exist imple continuous arcs $P_1A$, $P_1B$, $P_2A$ and $P_2B$ each of which has nly one point in common with $\alpha$. The point-set composed of $P_1A$ and $P_1B$ contains, as a subset, a simple continuous arc $A\overline{P}_1B$, while the oint-set composed of $P_2A$ and $P_2B$ contains a simple continuous arc $A\overline{P}_2B$. The arcs $A\overline{P}_1B$ and $A\overline{P}_2B$ are clearly subsets of $K$ and of $E$ espectively. Let $J_1$ denote the simple closed curve formed by the two rcs $AOB$ and $A\overline{P}_1B$, and let $J_2$ denote that formed by $AOB$ and $A\overline{P}_2B$. et $R_1$ and $R_2$ denote the interiors of $J_1$ and $J_2$ respectively. Since a ortion of the boundary of $R_1$ belongs to $K$, therefore $R_1$ contains points f $K$. Similarly $R_2$ contains points of $E$. Since the connected point-set $Z$ contains points without $R_1$ but no point on the boundary of $R_1$, herefore it contains no point in $R_1$. Hence $R_1$ contains no point of $\alpha$, he boundary of $E$.

Let $J_3$ denote the closed curve formed by the arcs $A\overline{P}_1B$ and $A\overline{P}_2B$ nd let $R_3$ denote its interior. Then either $R_3 = R_1 + R_2 + \underset{\frown}{AOB}$ or $R_2 = R_1 + R_3 + \underset{\frown}{A\overline{P}_1B}$.

Case 1. Suppose that $R_3 = R_1 + R_2 + \underset{\frown}{AOB}$. Then there are points f the connected point-set $K$ without $R_2$ and therefore, since $K$ contains o point of the boundary of $R_2$, $K$ contains no point of $R_2$. Hence here is no point of $\alpha$ in $R_2$. So, in this case, $\underset{\frown}{AOB}$[11]) contains every oint of $\alpha$ which is in $R_3$ and therefore, since $R_3$ is a domain containing $\underset{\frown}{AOB}$, no point of $\underset{\frown}{AOB}$ is a limit point of $\alpha - \underset{\frown}{AOB}$.

[9]) A. Schoenflies, Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigeiten. Zweiter Teil, Leipzig 1908, S. 237.

[10]) Über den Rand der einfach zusammenhängenden ebenen Gebiete. Math. eitschr. 9 (1921), S. 64 (73).

[11]) If $AOB$ is a simple continuous arc, the notation $\underset{\frown}{AOB}$ is used to designate he point-set $AOB - (A + B)$.

Case 2. Suppose that $R_2 = R_1 + R_3 + \overline{AP_1B}$. In this case the
are points of $K$ in $R_2$, but no points of $K$ on the boundary of $R_2$, a
therefore, since $K$ is connected, $K$ lies wholly in $R_2$. Hence there is
point of $K$, and therefore no point of $\alpha$, without $R_2$. Hence $\alpha - AO$
is a subset of $R_2$. But it has already been shown that $R_1$ contains
point of $\alpha$. Hence $\alpha - AOB$ is a subset of $R_3$.

It follows that in Case 2, as well as in Case 1, no point of $\overline{AO}$
is a limit point of $\alpha - AOB$. Thus neither of the sets $\overline{AOB}$ a
$\alpha - AOB$[12]) contains a limit point of the other one. So if $A$ and
are any two points of the closed, connected, limited point-set $\alpha$ the
$\alpha - (A + B)$ is the sum of two mutually exclusive point-sets neither
which contains a limit point of the other one. It follows[13]) that $\alpha$
a simple closed curve.

Theorem 5. *If the points $A$ and $B$ do not lie on the continuou curve $\beta$, but are separated*[14]) *from each other by $\beta$, then they are s parated from each other by a simple closed curve which is a subset of $\beta$.*

Proof. Clearly one of the points $A$ and $B$ lies in a limited domain
which contains no point of $\beta$ but has a portion of $\beta$ as its boundary
This portion of $\beta$ is itself a continuous curve. Hence, by Theorem 4
the outer boundary of $R$ is a simple closed curve. It is clear tha
this curve separates $A$ from $B$.

[12]) The point-set $\alpha - AOB$ certainly exists. For otherwise the simple continuou arc $AOB$ would be the complete boundary of a limited domain, which is clearl impossible.

[13]) See my paper Concerning simple continuous curves, Transactions of th American Mathematical Society, 21 (1920), S. 342.

[14]) Two points $A$ and $B$ are said to be separated from each other by th closed point-set $M$ if every simple continuous arc from $A$ to $B$ contains a point $M$ distinct from $A$ and from $B$.

(Eingegangen am 31. Januar 1922.)

# Über die Reduktion algebraischer Gleichungen durch Adjunktion insbesondere reeller Radikale.

Von

Alfred Loewy in Freiburg i. B.

In den zwei ersten Paragraphen dieses Aufsatzes sollen mit den elementarsten Hilfsmitteln der Algebra zwei Reziprozitätssätze abgeleitet werden; sie handeln von der gegenseitigen Reduktion, die jede von zwei irreduziblen Gleichungen durch die Adjunktion von Wurzeln der andern erfährt. Den zweiten dieser Sätze, der sich in § 2 findet, verdankt man Herrn A. Kneser[1]); doch hat er nicht die Zuordnung der Faktoren der zwei Gleichungen, die hier dadurch erzielt wird, daß die Faktoren als größte gemeinsame Teiler definiert werden. Diesem zweiten Reziprozitätssatz ist auch eine Arbeit von G. Landsberg[2]) gewidmet; in ihr wird eine Zuordnung der Faktoren aber auf ganz anderem Wege als bei uns, nämlich vermöge der Galoisschen Gruppe, von der im folgenden kein Gebrauch gemacht wird, studiert. Aus dem von uns als zweiter Reziprozitätssatz bezeichneten Theorem hat Landsberg[3]) auch noch die Gradzahlen abgeleitet, die bei dem von mir im § 1 behandelten Satz, den ich den ersten Reziprozitätssatz nenne, auftreten. Im § 3 folgere ich aus dem ersten Reziprozitätssatz — für das Verständnis von § 3 ist die Lektüre von § 2 nicht erforderlich — neue Resultate über die irreduziblen Gleichungen mit reellen Koeffizienten, die durch reelle Radikale darstellbare Wurzeln besitzen. Das weitgehendste, auf diesem Gebiete bekannte Ergebnis ist der Satz von Herrn O. Hölder[4]): Eine in einem reellen

[1]) Kneser, A.: Über die Gattung niedrigster Ordnung, unter welcher gegebene Gattungen algebraischer Größen enthalten sind. Math. Annalen **30** (1887), S. 196.

[2]) Landsberg, G.: Über Reduktion von Gleichungen durch Adjunktion. Journ. f. d. r. u. ang. Math. **132** (1906), S. 8.

[3]) Landsberg, G.: a. a. O. S. 9, Gleichung (14).

[4]) Hölder, O.: Über den Casus irreducibilis bei der Gleichung dritten Grades. Math. Annalen **38** (1891), S. 307. Vgl. weiter A. Kneser, Bemerkungen zu dem

Rationalitätsbereiche irreduzible algebraische Gleichung mit nur reell Wurzeln läßt sich bloß dann unter ausschließlicher Benutzung reell Radikale auflösen, wenn ihr Grad eine Potenz von 2 ist. Währe dieses Theorem sich auf Gleichungen mit ausnahmslos reellen Wurze bezieht, soll hier der Höldersche Satz dahin ausgedehnt werden, d für eine irreduzible Gleichung mit reellen Koeffizienten des Grad $2^{\mu}P$ ($\mu \geqq 0$, $P$ beliebige ungerade Zahl) die Existenz jeder einzelne durch reelle Radikale darstellbaren Wurzel das Vorhandensein v mindestens $P-1$ imaginären Gleichungswurzeln zur Folge hat Irr duzible Gleichungen beliebigen ungeraden Grades $P$ mit reellen Koeff zienten können daher niemals mehr als eine durch reelle Radikale da stellbare Wurzel besitzen, und diese ist dann die *einzige*[5]) reelle Gleichung wurzel. Für irreduzible Gleichungen $2^{\mu}P$-ten Grades mit reellen Koeff zienten ist die Anzahl der durch reelle Radikale darstellbaren Wurzel höchstens gleich $2^{\mu}$, und im Falle, daß die Gleichung $2^{\mu}$ solcher Wurzel besitzt, hat sie sonst keine reellen Lösungen; hat die Gleichung $\nu < 2$ durch reelle Radikale darstellbare Wurzeln, so kann sie außer den dan notwendig vorhandenen $\nu(P-1)$ imaginären auch noch reelle, nicht durc reelle Radikale darstellbare Wurzeln besitzen. $P=1$ liefert den Sat von Herrn Hölder.

## § 1.

**Erster Reziprozitätssatz von der gegenseitigen Reduktion, die jede vo zwei irreduziblen Gleichungen durch die Adjunktion aller Wurzeln de andern erfährt. Kronecker-Kneserscher Satz.**

*$A(x)$ und $B(x)$ seien zwei im Rationalitätsbereiche* P *irreduzibl ganze Funktionen der Grade $a$ und $b$, die gleich Null gesetzt, di Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_a$ bzw. $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_b$ besitzen. Unter $\beta_i$ eine de Wurzeln von $B(x)=0$ verstanden, sei $A_1(x;\beta_i)$ eine im erweiterte Rationalitätsbereich* $(\mathsf{P}, \beta_i)$ *irreduzible ganze Funktion, die $A(x)$ teil Dann gilt die Zerlegung:*

$$(1) \qquad c_1 A(x)^{b'} = A_1(x;\beta_1)\cdot A_1(x;\beta_2)\ldots A_1(x;\beta_b);$$

*hierbei bedeutet $c_1$ eine Konstante aus dem Rationalitätsbereiche* P. *un*

---

sogenannten Casus irreducibilis bei kubischen Gleichungen. Math. Annalen **41** (1893) S. 344. A. Loewy, Über algebraische Gleichungen mit reellen Wurzeln und de sog. Casus irreducibilis bei kubischen Gleichungen. Math. Zeitschr. **11** (1921), S. 10

[5]) In dem speziellen Fall, daß der Gleichungsgrad die Potenz einer Primzah ist, findet sich, wie ich nach Abschluß der Arbeit bemerke, dieses Resultat bereit bei Gegenbauer, L.: Zur Theorie der algebraischen Gleichungen. Monatshefte f Math. u. Physik **6** (1895), S. 12.

*er Exponent $b'$ ergibt sich aus dem Grade $a'$ von $A_1(x;\beta_i)$ mittels der elation*

2) $$ab' = ba'.$$

*Unter Benützung der irreduziblen Gleichung $B(x)=0$, die $\beta_1$ zur Wurzel hat, schreibe man $A_1(x;\beta_1)$ als ganze rationale Funktion von $\beta_1$ nd bilde dann $A_1(\alpha_1;x)$, indem man $x$ durch $\alpha_1$ und $\beta_1$ durch $x$ ersetzt. Führt man $B_1(\alpha_1;x)$ als größten gemeinsamen Teiler von $B(x)$ nd $A_1(\alpha_1;x)$ ein, so ist der Grad von $B_1(\alpha_1;x)$ die in der Relation 2) auftretende Zahl $b'$, weiter ist $B_1(\alpha_1;x)$ eine im Rationalitätsbereiche P, $\alpha_1$) irreduzible ganze Funktion, und es gilt schließlich die zu* (1) *eziproke Zerlegung*:

3) $$c_2 B(x)^{a'} = B_1(\alpha_1;x)\cdot B_1(\alpha_2;x)\ldots B_1(\alpha_a;x);$$

*ierbei bedeutet $c_2$ eine dem Rationalitätsbereiche* P *angehörige Konstante. Die in* (1) *auftretenden ganzen Funktionen $A_1(x;\beta_k)$ $(k=1,2,\ldots,b)$ önnen erklärt werden als größte gemeinsame Teiler von $A(x)$* und $B_1(x;\beta_k)$: *etztere Funktion wird erhalten, indem man $B_1(\alpha_1;x)$ mittels der irreduziblen Gleichung $A(x)=0$, der $\alpha_1$ genügt, als ganze rationale Funktion on $\alpha_1$ schreibt und dann aus $B_1(\alpha_1;x)$ die ganze Funktion $B_1(x;\beta_k)$ on $x$ bildet, indem man $\alpha_1$ durch $x$ und $x$ durch $\beta_k$ in $B_1(\alpha_1;x)$ ersetzt.*

Die Gleichung (1) ist wohlbekannt. Aus der Teilbarkeit von $A(x)$ durch $A_1(x;\beta_i)$, also $A(x)=A_1(x;\beta_i)\cdot A_2(x;\beta_i)$, ergibt sich nämlich egen der Irreduzibilität von $B(x)=0$, daß für jede Wurzel $\beta_k$ $(k=1,2,\ldots,b)$ on $B(x)=0$ die Relation $A(x)=A_1(x;\beta_k)\cdot A_2(x;\beta_k)$ gelten muß. Die ganzen Funktionen $A_1(x;\beta_k)$ verschwinden demnach nur für die Wurzeln von $A(x)=0$. Da das auf der rechten Seite von (1) stehende Produkt eine symmetrische Funktion der Wurzeln von $B(x)=0$ ist, gehört s dem Rationalitätsbereiche P an und kann sich, da es keine anderen Wurzeln als solche von $A(x)=0$ besitzt, nur um einen konstanten Faktor on einer Potenz von $A(x)$ unterscheiden.

Durch Vergleich der Grade der Polynome, die in (1) rechts und inks stehen, ergibt sich die Gleichung (2).

Ist $A_1(x;\beta_i)$ in $(\mathsf{P},\beta_i)$ irreduzibel, so ist auch jede der Funktionen $A_1(x;\beta_k)$ $(k=1,2,\ldots,b)$ in dem entsprechenden Rationalitätsbereiche $(\mathsf{P},\beta_k)$ ebenfalls irreduzibel. Aus einer Zerlegung

$$A_1(x;\beta_k) = A_1^*(x;\beta_k)\cdot A_1^{**}(x;\beta_k)$$

würde nämlich infolge der Irreduzibilität von $B(x)=0$ gegen die Voraussetzung eine Zerlegung $A_1(x;\beta_i)=A_1^*(x;\beta_i)A_1^{**}(x;\beta_i)$ folgen. Jede der Gleichungen $A_1(x;\beta_1)=0$, $A_1(x;\beta_2)=0$, $\ldots$, $A_1(x;\beta_b)=0$ besitzt

demnach infolge ihrer Irreduzibilität entsprechend ihrem Grade $a'$ auch untereinander verschiedene Wurzeln, die der Reihe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_a$ ang hören. Unter der Gesamtheit der $a'b$ Wurzeln von $A_1(x;\beta_1)=0$ $A_1(x;\beta_2)=0, \ldots, A_1(x;\beta_b)=0$ muß, wie die linke Seite der Gleichung ( lehrt, jede der Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_a$ genau $b'$-mal auftreten. Demnac erfüllt $\alpha_i$, wobei $\alpha_i$ irgendeine beliebig ausgewählte der Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots,$ von $A(x)=0$ bedeutet, genau $b'$ der Gleichungen $A_1(x;\beta_1)=$ $A_1(x;\beta_2)=0, \ldots, A_1(x;\beta_b)=0$. Hieraus folgt, daß die Gleichun $A_1(\alpha_i;x)=0$ stets durch genau $b'$ der Wurzeln $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_b$ vo $B(x)=0$ befriedigt wird. Der größte gemeinsame Teiler $B_1(\alpha_i;x)$ vo $B(x)$ und $A_1(\alpha_i;x)$ hat demnach den Grad $b'$.

Angenommen $B_1(\alpha_i;x)$ wäre in $(\mathsf{P},\alpha_i)$ reduzibel, also

$$B_1(\alpha_i;x)=B_1^*(\alpha_i;x)\cdot B_1^{**}(\alpha_i;x), \tag{4}$$

wobei $B_1^*(\alpha_i;x)$ eine in $(\mathsf{P},\alpha_i)$ irreduzible ganze Funktion vom Grad $b^*<b'$ bedeute. Da nach (4) $B_1^*(\alpha_i;x)$ bloß durch die Wurzeln vo $B_1(\alpha_i,x)=0$ annulliert wird, weiter $B_1(\alpha_i;x)$ als Teiler von $B(x)$ nu für die Wurzeln von $B(x)=0$ verschwindet, trifft das gleiche fü $B_1^*(\alpha_i;x)$ zu. Die letzte Funktion möge etwa durch $\beta_l$ annulliert werde so daß man hat:

$$B_1^*(\alpha_i;\beta_l)=0. \tag{5}$$

Schreibt man $B_1^*(\alpha_i;x)$ mittels der irreduziblen Gleichung $A(x)=$ die $\alpha_i$ zur Wurzel besitzt, als ganze rationale Funktion von $\alpha_i$ und bild dann aus $B_1^*(\alpha_i;x)$ die Funktion $B_1^*(x;\beta_l)$, indem man in $B_1^*(\alpha_i;$ die Größe $\alpha_i$ durch $x$ und $x$ durch $\beta_l$ ersetzt, so kann man den größte gemeinsamen Teiler von den zwei ganzen Funktionen in $x$, nämlich $A($ und $B_1^*(x;\beta_l)$ aufsuchen; dieser sei mit $A_1^*(x;\beta_l)$ bezeichnet. Nach de in den vorigen Absätzen erhaltenen Resultaten ergibt sich dann die Zerlegun

$$c_1^*A(x)^{b^*}=A_1^*(x;\beta_1)\cdot A_1^*(x;\beta_2)\ldots A_1^*(x;\beta_b). \tag{6}$$

Hierbei hat $A_1^*(x;\beta_1)$ einen Grad $a^*$, der sich aus der Gleichung

$$a^*b=b^*a \tag{7}$$

bestimmt; $c_1^*$ bedeutet eine Konstante aus dem Rationalitätsbereiche

Da nach (5) die zwei Gleichungen $B_1^*(x;\beta_l)=0$ und $A(x)=0$ d Wurzel $\alpha_i$ gemeinsam haben, muß $\alpha_i$ auch ihren größten gemeinsame Teiler $A_1^*(x;\beta_l)$ annullieren, so daß

$$A_1^*(\alpha_i;\beta_l)=0 \tag{8}$$

ist. Weiter hat man, wie sich aus (4) und (5) ergibt, $B_1(\alpha_i;\beta_l)=$ Mithin verschwindet $B_1(\alpha_i;x)$ für $x=\beta_l$. Da $B_1(\alpha_i;x)$ als größter g

einsamer Teiler von $B(x)$ und $A_1(\alpha_i; x)$ definiert war, muß auch $_1(\alpha_i; x)$ für $x = \beta_l$ verschwinden, so daß man

$$A_1(\alpha_i; \beta_l) = 0$$

hält. Nach (8) und (9) hat die in $(\mathsf{P}, \beta_l)$ irreduzible Gleichung $A_1(x; \beta_l) = 0$ it der Gleichung $A_1^*(x; \beta_l) = 0$, die ebenfalls Koeffizienten aus dem ationalitätsbereiche $(\mathsf{P}, \beta_l)$ hat, die Wurzel $\alpha_i$ gemeinsam. Mithin muß er Grad $a^*$ der zweiten Gleichung gleich oder größer als der Grad $a'$ er ersten sein. Unsere Annahme $b^* < b'$ würde aber, wie der Vergleich on (2) und (7) lehrt, $a^* < a'$ nach sich ziehen. Folglich ist die Annahme $^* < b'$ widerlegt, und die Grade $b^*$ und $b'$ von $B_1^*(\alpha_i; x)$ und $B_1(\alpha_i; x)$ üssen übereinstimmen. Mithin kann man in (4): $B_1(\alpha_i; x) \equiv B_1^*(\alpha_i; x)$, lso auch $B_1(x; \beta_l) \equiv B_1^*(x; \beta_l)$ setzen. Da $b' = b^*$ war, so ist auch, wie us (2) und (7) hervorgeht, $a' = a^*$. Wegen der Übereinstimmung in den raden kann man, da $A_1(x; \beta_l)$ irreduzibel war, $A_1^*(x; \beta_l) \equiv A_1(x; \beta_l)$ ählen, also in (6) auch die Konstante $c_1^*$ gleich der Konstanten $c_1$ von (1) ehmen. Demnach ist $A_1(x; \beta_l)$ der größte gemeinsame Teiler von $A(x)$ nd $B_1(x; \beta_l)$. Wegen der Irreduzibilität von $B(x)$ in $\mathsf{P}$ trifft das Entprechende für jede der Funktionen $A_1(x; \beta_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, b)$ zu. Hiermit ind alle Aussagen des ersten Reziprozitätssatzes bewiesen.

In dem bewiesenen Reziprozitätssatze ist als Spezialfall der Kronecker-neserschen Satz[6]) enthalten, den wir verschärft folgendermaßen ausprechen:

*Sind $A(x) = 0$ und $B(x) = 0$ zwei im Rationalitätsbereiche $\mathsf{P}$ reduzible Gleichungen der Grade $a$ und $b$ und genügt eine Wurzel $\alpha$ on $A(x) = 0$ in einem durch eine Wurzel $\beta$ von $B(x) = 0$ erweiterten ationalitätsbereiche $(\mathsf{P}, \beta)$ der in $(\mathsf{P}, \beta)$ irreduziblen Gleichung $A_1(x; \beta) = 0$ om Grade $a'$, so genügt $\beta$ einer in $(\mathsf{P}, \alpha)$ irreduziblen Gleichung $B_1(\alpha; x) = 0$ om Grade $b'$, und es ist*

$$ab' = ba'. \tag{2}$$

*ie Gleichung $B_1(\alpha; x) = 0$ findet man als größten gemeinsamen Teiler er zwei ganzen Funktionen $B(x)$ und $A_1(\alpha; x)$, wobei $A_1(\alpha; x)$ aus $_1(x; \beta)$ hervorgeht, indem man die letztere Funktion mittels der leichung $B(\beta) = 0$ als ganze Funktion von $\beta$ schreibt und dann in $_1(x; \beta)$ die Größen $x$ und $\beta$ durch $\alpha$ bzw. $x$ ersetzt.*

[6]) Kneser, A.: Math. Annalen **30** (1887), S. 195, hat diesen Satz selbständig efunden, den Kronecker nach Hölders Angaben [Math. Annalen **38** (1891) S. 309] seinen Vorlesungen vortrug. Die hier gegebene Bestimmung von $B_1(\alpha_1; x)$ findet ch noch nicht bei Kneser. Die weitere Literatur über den Kronecker-neserschen Satz findet man in meinem Aufsatz in Math. Zeitschr. **11** (1921), S. 109.

Daß die nach der obigen Vorschrift gebildete ganze Funktion $B_1(\alpha;$ in $(\mathsf{P}; \alpha)$ irreduzibel ist und den durch (2) bestimmten Grad $b'$ besitz ist beim Beweis des Hauptsatzes gezeigt worden. Daß weiter $B_1(\alpha;$ für $x = \beta$ verschwindet, sieht man sofort ein; denn $B_1(\alpha; x)$ ist na Definition größter gemeinsamer Teiler von $B(x)$ und $A_1(\alpha; x)$, ferner i nach Voraussetzung $A_1(\alpha; \beta) = 0$, d. h. $A_1(\alpha; x)$ und $B(x) = 0$ hab die Wurzel $\beta$ gemeinsam, also muß diese auch ihren größten gemeinsam Teiler $B_1(\alpha; x)$ annullieren.

Aus dem Reziprozitätssatz I ergibt sich auch das wohlbekann Resultat, das im folgenden in § 3 noch zu benützen sein wird:

*Wird eine im Rationalitätsbereiche* $\mathsf{P}$ *irreduzible Gleichung* $A(x) =$ *durch Adjunktion einer Wurzel* $\beta$ *einer ebenfalls in* $\mathsf{P}$ *irreduzibl Gleichung* $B(x) = 0$ *reduzibel, so wird auch umgekehrt* $B(x) = 0$ *dur Adjunktion irgendeiner Wurzel von* $A(x) = 0$ *reduzibel.*

Nach der Gleichung (2) hat man $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$. Ist $a' < a$, so mu demnach auch $b' < b$ sein, d. h. die Teiler $B_1(\alpha_1; x)$, $B_1(\alpha_2; x), \ldots, B_1(\alpha_a;$ von $B(x)$ haben niedrigeren Grad als $B(x)$.

## § 2.

**Zweiter Reziprozitätssatz von der gegenseitigen Reduktion, die jede vo zwei irreduziblen Gleichungen durch die Adjunktion einer Wurzel d andern erfährt.**

*$A(x)$ und $B(x)$ seien zwei im Rationalitätsbereiche* $\mathsf{P}$ *irreduzib ganze Funktionen. $\alpha$ sei irgendeine Wurzel von $A(x) = 0$ und $\beta$ ei solche von $B(x) = 0$. Dann zerfallen $A(x)$ im Rationalitätsbereiche* $(\mathsf{P},$ *und $B(x)$ im Rationalitätsbereiche* $(\mathsf{P}, \alpha)$ *in gleichviele irreduzib Faktoren*

$$A(x) = A_1(x; \beta)\, A_2(x; \beta) \ldots A_\lambda(x, \beta),$$

$$B(x) = B_1(\alpha; x)\, B_2(\alpha; x) \ldots B_\lambda(\alpha; x).$$

*Ist $a_i$ der Grad von $A_i(x; \beta)$ und $b_i$ derjenige von $B_i(\alpha; x)$, so gi die Relation $a_i b = b_i a$.*

*Die Zuordnung der Faktoren ist folgende: $A_i(x; \beta)$ ist der größ gemeinsame Teiler von $A(x)$ und $B_i(x; \beta)$, wobei $B_i(x; \beta)$ aus $B_i(\alpha;$ hervorgeht, indem man $B_i(\alpha; x)$ mittels der irreduziblen Gleichung $A(x) =$ die $\alpha$ zur Wurzel hat, als ganze rationale Funktion von $\alpha$ schreibt un dann in $B_i(\alpha; x)$ die Größen $\alpha$ und $x$ durch $x$ und $\beta$ ersetzt.*

*Entsprechend ist $B_i(\alpha; x)$ der größte gemeinsame Teiler von $B($ und $A_i(\alpha; x)$, wobei $A_i(\alpha, x)$ aus $A_i(x; \beta)$ zu bilden ist, indem ma $A_i(x; \beta)$ mittels der irreduziblen Gleichung $B(x) = 0$, die $\beta$ zur Wurz*

*t, als ganze rationale Funktion von $\beta$ schreibt und dann in $A_i(x;\beta)$ e Größen $x$ und $\beta$ durch $\alpha$ und $x$ ersetzt.*

Zum Beweise betrachten wir für den Rationalitätsbereich $(\mathsf{P},\beta)$ die rlegung von $A(x)$ in seine irreduziblen Faktoren

$$A(x) = A_1(x;\beta)\,A_2(x,\beta)\ldots A_\lambda(x;\beta).$$

Die Irreduzibilität von $B(x)$ im Rationalitätsbereiche $\mathsf{P}$ hat zur Folge, ß für jede Wurzel $\beta_l$ von $B(x)=0$ die entsprechende Zerlegung

$$A(x) = A_1(x,\beta_l)\,A_2(x;\beta_l)\ldots A_\lambda(x;\beta_l)$$

lten muß. Hieraus ergibt sich, daß, wenn $i$ und $k$ irgend zwei Zahlen s der Reihe $1, 2, \ldots, \lambda$ sind, niemals $A_i(\alpha;x)=0$ und $A_k(\alpha;x)=0$ ne gemeinsame Wurzel $\beta_l$ besitzen können, die $B(x)=0$ befriedigt; nn sonst wäre $A_i(\alpha;\beta_l)=0$ und $A_k(\alpha;\beta_l)=0$, und es hätte, wie man s der Zerlegung $A(x)=A_1(x;\beta_l)A_2(x;\beta_l)\ldots A_\lambda(x;\beta_l)$ sieht, die reduzible Gleichung $A(x)=0$ die Größe $\alpha$ zur mehrfachen Wurzel. Da $_i(\alpha;x)$ und $A_k(\alpha;x)$ keine Wurzel $\beta_l$ von $B(x)=0$ gemeinsam haben, der größte gemeinsame Teiler von $A_i(\alpha;x)$ und $B(x)$, den wir mit $B_i(\alpha;x)$ zeichnen wollen, verschieden von dem größten gemeinsamen Teiler von $_k(\alpha;x)$ und $B(x)$, der mit $B_k(\alpha;x)$ bezeichnet sei. $B(x)$ ist demnach durch e $\lambda$ untereinander verschiedenen Funktionen $B_1(\alpha;x), B_2(\alpha;x), \ldots, B_\lambda(\alpha;x)$ ilbar, die den Faktoren $A_1(x;\beta), A_2(x;\beta), \ldots, A_\lambda(x;\beta)$ von $A(x)$ tsprechen. Wie aus dem für den ersten Reziprozitätssatz gegebenen eweis folgt, ist die $A_i(x;\beta)$ entsprechende ganze Funktion $B_i(\alpha;x)$ im ationalitätsbereiche $(\mathsf{P};\alpha)$ irreduzibel. $B(x)$ besitzt demnach mindestens e $\lambda$ in $(\mathsf{P},\alpha)$ irreduziblen, untereinander verschiedenen ganzen Funktionen $_1(\alpha;x), B_2(\alpha;x), \ldots, B_\lambda(\alpha;x)$ als Teiler. Umgekehrt kann man aus dem irreduziblen Faktor $B_i(\alpha;x)$ von $B(x)$ einen in $(\mathsf{P},\beta)$ irreduziblen aktor $A_i(x;\beta)$ von $A(x)$ als größten gemeinsamen Teiler von $A(x)$ nd $B_i(x;\beta)$ herleiten. Da $A(x)$ nur $\lambda$ in $(\mathsf{P},\beta)$ irreduzible Faktoren $_i(x;\beta)$ $(i=1,2,\ldots,\lambda)$ besitzt, kann $B(x)$ ebenfalls nicht mehr als $\lambda$ $(\mathsf{P},\alpha)$ irreduzible Faktoren $B_i(\alpha;x)$ $(i=1,2,\ldots,\lambda)$ besitzen. Hierit sind alle Aussagen des zweiten Reziprozitätssatzes bewiesen, da die adrelationen $a_ib=b_ia$ sich aus dem ersten Reziprozitätssatze ergeben.

## § 3.

## ber irreduzible Gleichungen mit reellen Koeffizienten, die durch reelle Radikale darstellbare Wurzeln haben.

Für die weiter durchzuführenden Untersuchungen brauchen wir lgenden

Hilfssatz 1. Ist $A(x)$ eine im Rationalitätsbereiche $\mathsf{P}$ irreduzible nze Funktion vom Grade $a$ mit den Wurzeln $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_a$ und wird

$A(x)$ durch Adjunktion einer Wurzel der in P irreduziblen binomisch Gleichung $x^p - \varrho = 0$ vom Primzahlgrade $p$ mit den Wurzeln $\beta_1, \beta_2, \ldots,$ reduzibel, so läßt sich $A(x)$ zerlegen in

$$(1^*) \qquad c_1 A(x) = A_1(x; \beta_1) A_1(x; \beta_2) \ldots A_1(x; \beta_p).$$

Hierbei bedeutet $c_1$ eine Konstante aus P und $A_1(x, \beta_i)$ $(i = 1, 2, \ldots,$ ergibt sich als größter gemeinsamer Teiler von $A(x)$ und $f_1(x; \beta$ Die letzte Funktion erhält man, indem man $f_1(\alpha_1; x)$ mittels der Gleichu $A(x) = 0$, die $\alpha_1$ zur Wurzel hat, als ganze rationale Funktion von schreibt und dann in $f_1(\alpha_1; x)$ die Größen $\alpha_1$ und $x$ durch $x$ und $\beta_1$ setzt. $f_1(\alpha_1; x)$ selbst ist in $x$ vom ersten Grade, und man hat:

$$(3^*) \qquad (x^p - \varrho)^{a'} = f_1(\alpha_1; x) \cdot f_1(\alpha_2; x) \ldots f_1(\alpha_a; x),$$

wobei $a' = \frac{a}{p}$ den Grad von $A_1(x; \beta_1)$ angibt.

Nach dem Korollar, das am Ende von § 1 aus dem ersten Reziprozitä satze abgeleitet wurde, zieht die Reduzibilität von $A(x)$ bei Adjunkti einer Wurzel von $x^p - \varrho = 0$ nach sich, daß auch umgekehrt $x^p - \varrho$ Adjunktion einer Wurzel von $A(x) = 0$ reduzibel werden muß. W aber $x^p - \varrho$ reduzibel, so besitzt es nach einem Abel-Kroneckersch Satz[7]) einen Faktor ersten Grades. Hiernach ist $x^p - \varrho$ durch eine gan Funktion ersten Grades mit Koeffizienten aus $(\mathsf{P}, \alpha_i)$ teilbar, wobei $\alpha_i$ je Wurzel von $A(x) = 0$ bedeutet. Diese Funktion sei mit $f_1(\alpha_i; x)$ bezeichn und werde so gewählt, daß $x$ in $f_1(\alpha_i; x)$ den Koeffizienten 1 besitzt. Da gilt die Zerlegung $(3^*)$ und, da $f_1(\alpha_i; x)$ vom ersten Grade in $x$ i muß der in Gleichung (4) beim ersten Reziprozitätssatz auftreten Exponent $b'$ den Wert 1 annehmen, also muß auch noch die Z legung $(1^*)$ stattfinden.

Aus dem Hilfssatz 1 leiten wir weiter den für das Folgende grun legenden Hilfssatz 2 ab:

*Ist $p$ eine ungerade Primzahl, haben die Gleichungen $A(x) = 0$ u $x^p - \varrho = 0$ Koeffizienten aus einem reellen Rationalitätsbereich* P, *in d beide irreduzibel sind, und wird $A(x)$ reduzibel, wenn zu* P *die einz reelle Wurzel $\beta_1 = \sqrt[p]{\varrho}$ von $x^p - \varrho = 0$ adjungiert wird, so hat $A(x) =$ mindestens $\frac{a}{p}(p-1) = a - \frac{a}{p}$ imaginäre Wurzeln; die reellen Wurz von $A(x) = 0$ genügen $A_1(x; \beta_1) = 0$, wobei die Bedeutuug von $A_1(x;$ aus der Zerlegung $(1^*)$ im voraufgehenden Hilfssatz zu entnehmen*

Ist $p$ eine ungerade Primzahl, so hat die Gleichung $x^p - \varrho = 0$ die einzige reelle Wurzel $\beta_1 = \sqrt[p]{\varrho}$; die anderen Wurzeln $\beta_2, \beta_3, \ldots, \beta_p$ sind

[7]) Abel, N. H.: Journ. f. r. u. ang. Math. 1 (1826), S. 71 = Oeuvres par Syl et Lie 1. S. 72; Kronecker, Monatsber. d. Berliner Akademie 1879, S. 206.

zweien konjugiert imaginär. Angenommen $A_1(x;\beta_i)=0$ $(i=2,3,\ldots,p)$ be eine reelle Wurzel $r$, also $A_1(r;\beta_i)=0$. Dann erhält man durch Über- ng zu den konjugiert imaginären Größen, da $A_1(r,\beta_i)$ als einzige imaginäre röße $\beta_i$ enthält, $A_1(r,\overline{\beta_i})=0$, wobei $\overline{\beta_i}$ zu $\beta_i$ konjugiert imaginär ist. $_1(x;\overline{\beta_i})$ ist aber einer der in $(1^*)$ auftretenden Teiler $A_1(x;\beta_2)$, $_1(x;\beta_3),\ldots,A_1(x;\beta_p)$ von $A(x)$, und zwar ein von $A_1(x;\beta_i)$ verschiedener. ne reelle Wurzel $r$ von $A_1(x;\beta_i)=0$ müßte demnach wegen $A_1(r;\beta_i)=0$ id $A_1(r;\overline{\beta_i})=0$, wie $(1^*)$ lehrt, mindestens eine Doppelwurzel der reduziblen Gleichung $A(x)=0$ sein, was unmöglich ist. Die $-1)$ Gleichungen $A_1(x;\beta_2)=0$, $A_1(x;\beta_3)=0,\ldots,A_1(x;\beta_p)=0$ aben also imaginäre Wurzeln. Da jede den Grad $\frac{a}{p}$ besitzt, hat $(x)=0$ mindestens $\frac{a(p-1)}{p}$ imaginäre Wurzeln, und die reellen Wurzeln on $A(x)=0$ genügen $A_1(x;\beta_1)=0$.

Wir beweisen jetzt den folgenden Satz:

*Besitzt eine irreduzible Gleichung mit reellen Koeffizienten eine durch elle Radikale darstellbare Wurzel, so kann die Gleichung, wenn ihr rad eine ungerade Zahl ist, keine weitere reelle Wurzel haben.*

Von der im reellen Rationalitätsbereiche P irreduziblen Gleichung $(x)=0$ von ungeradem Grade $a$ lasse sich nach Voraussetzung eine Wurzel $\alpha_1$ durch reelle Radikale darstellen. Man kann annehmen, daß edes dieser Radikale einer binomischen Gleichung mit reellen Koeffizienten om Primzahlgrade genügt; denn die Gleichung $x^{q_1q_2}=c$ läßt sich durch ie zwei Gleichungen $y^{q_1}=c$, $x^{q_2}=y$ ersetzen, die sukzessiv zu lösen nd. Die durch reelle Radikale darstellbare Wurzel $\alpha_1$ von $A(x)=0$ ißt sich daher in der Form $\alpha_1=R(\varrho_1,\varrho_2,\ldots,\varrho_{\tau_\varkappa})$ annehmen, wobei $R$ ine ganze rationale Funktion der Argumente $\varrho_1,\varrho_2,\ldots,\varrho_{\tau_\varkappa}$ mit Koeffizienten us P bedeutet und die reellen Größen $\varrho_1,\varrho_2,\ldots,\varrho_{\tau_\varkappa}$ nacheinander durch eine Kette reiner Gleichungen der Primzahlgrade $p_1,p_2,\ldots,p_{\tau_\varkappa}$ zu bestimmen sind:

$\varrho_1^{p_1}=R_1$, $\varrho_2^{p_2}=R_2(\varrho_1)$, $\varrho_3^{p_3}=R_3(\varrho_1,\varrho_2)$, $\ldots$, $\varrho_{\tau_\varkappa}^{p_{\tau_\varkappa}}=R_{\tau_\varkappa}(\varrho_1,\varrho_2,\ldots,\varrho_{\tau_\varkappa-1})$.

Die Größen $R_i(\varrho_1,\varrho_2,\ldots,\varrho_{i-1})$ $(i=1,2,\ldots,\tau_\varkappa)$ sind ganze rationale Funktionen der reellen Größen $\varrho_1,\varrho_2,\ldots,\varrho_{i-1}$ mit Koeffizienten aus dem reellen Rationalitätsbereiche P. Die Exponenten $p_1,p_2,\ldots,p_{\tau_\varkappa}$ sind ausnahmslos Primzahlen. Durch Adjunktion aller Größen $\varrho_1,\varrho_2,\ldots,\varrho_{\tau_\varkappa}$ zu P spaltet sich von $A(x)$ ein Faktor ersten Grades mit der Wurzel $\alpha_1$ ab. Daher muß durch die sukzessive Adjunktion von $\varrho_1,\varrho_2,\ldots,\varrho_{\tau_\varkappa}$ sich $A(x)$ einmal reduzibel erweisen. $A(x)$ bleibe irreduzibel im Rationalitätsbereiche $(P,\varrho_1,\varrho_2,\ldots,\varrho_{\tau_1-1})$ und werde zum erstenmal reduzibel durch die weitere Adjunktion von $\varrho_{\tau_1}$, der reellen Wurzel von $x^{p_{\tau_1}}=R_{\tau_1}(\varrho_1,\varrho_2,\ldots,\varrho_{\tau_1-1})$. Dann muß nach dem ersten Hilfssatz dieses Paragraphen die Zahl $a$

durch $p_{\tau_1}$ teilbar sein, und $p_{\tau_1}$ ist eine ungerade Primzahl, da $a$ u gerade ist. Weiter besitzt $A(x) = 0$ nach dem zweiten Hilfssatz mi destens $\frac{a}{p_{\tau_1}}(p_{\tau_1} - 1) = a - \frac{a}{p_{\tau_1}}$ imaginäre Wurzeln, und die reellen Wu zeln von $A(x) = 0$ genügen einer Gleichung $A_1(x) = 0$, deren linke Sei ein Teiler von $A(x)$ ist, den Grad $\frac{a}{p_{\tau_1}}$ besitzt und in dem Rationalität bereiche $(\mathsf{P}, \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{\tau_1})$ irreduzibel ist. Da die reellen Wurzeln vo $A(x) = 0$ die Gleichung $A_1(x) = 0$ befriedigen, trifft dies im besondere auch für die durch reelle Radikale darstellbare Wurzel $\alpha_1$ zu. Man kan daher auf $A_1(x) = 0$ dieselben Schlüsse wie auf $A(x) = 0$ anwenden. Durc die fortgesetzte Adjunktion muß $A_1(x) = 0$, da es durch $\alpha_1$ befriedi wird, wieder reduzibel werden. Dies geschehe durch die Adjunktion vo $\varrho_{\tau_1+1}, \varrho_{\tau_1+2}, \ldots, \varrho_{\tau_2}$ zum Rationalitätsbereich $(\mathsf{P}, \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{\tau_1})$, s daß $A_1(x)$ in $(\mathsf{P}, \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{\tau_2-1})$ noch irreduzibel, hingegen i $(\mathsf{P}, \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{\tau_2})$ reduzibel ist. Dann ist nach dem ersten Hilfssat dieses Paragraphen der Grad $p_{\tau_2}$ von $x^{p_{\tau_2}} = R_{\tau_2}(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{\tau_2-1})$ ei Teiler von $\frac{a}{p_{\tau_1}}$, und alle reellen Wurzeln von $A_1(x) = 0$, also auch die jenigen von $A(x) = 0$, genügen nach dem zweiten Hilfssatz einer i $(\mathsf{P}, \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{\tau_2})$ irreduziblen Gleichung vom Grade $\frac{a}{p_{\tau_1} p_{\tau_2}}$. So fort fahrend sieht man, daß die reellen Wurzeln von $A(x) = 0$ schließlich de Gleichung ersten Grades für $\alpha_1$ genügen, also mit $\alpha_1$ erschöpft sind.

Der vorige Satz läßt sich so erweitern, daß er auch die Gleichunge geraden Grades umfaßt:

*Besitzt eine irreduzible Gleichung mit reellen Koeffizienten von Grade $2^\mu P$, wobei $P$ eine ungerade Zahl ist, $\nu$ durch reelle Radikal darstellbare Wurzeln, so hat sie mindestens $\nu(P-1)$ imaginäre Wurzeln Die Maximalzahl von durch reelle Radikale darstellbaren Wurzeln, di eine irreduzible Gleichung $2^\mu P$-ten Grades mit reellen Koeffizienten haben kann, ist demnach $2^\mu$.*

Der Satz ist bereits für $\mu = 0$ im voraufgehenden bewiesen. Wi zeigen daher seine Richtigkeit durch vollständige Induktion, indem wi seine Gültigkeit für Gleichungen $2^{\mu-1}P$-ten Grades voraussetzen und nach weisen, daß er auch für Gleichungen $2^\mu P$-ten Grades gilt. Besitzt die Gleichung $A(x) = 0$ vom Grade $2^\mu P$ die Zahl von $\nu$ durch reelle Radi kale darstellbaren Wurzeln, so wird $A(x) = 0$ reduzibel, wenn man die reellen Wurzeln einer Kette irreduzibler reeller binomischer Gleichungen von Primzahlgraden adjungiert; durch fortgesetzte solche Adjunktionen müssen sich offenbar die $\nu$ durch reelle Radikale darstellbaren Wurzeln

von $A(x)$ abspalten. Sei $A(x)=0$ in $(\mathsf{P}, \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{\tau_1-1})$ noch irreduzibel, werde aber erstmalig in $(\mathsf{P}, \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{\tau_1})$ reduzibel, wobei $\varrho_{\tau_1}$ Wurzel von $x^{p_{\tau_1}} = R(\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{\tau_1-1})$. Dann sind zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich $p_{\tau_1}=2$ oder $p_{\tau_1}$ ist eine ungerade Primzahl, also $>2$. Ist $p_{\tau_1}=2$, so zerfällt $A(x)$ nach dem ersten Hilfssatz dieses Paragraphen in zwei im Rationalitätsbereiche $(\mathsf{P}, \varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_{\tau_1})$ irreduzible Faktoren der Grade $2^{\mu-1}P$, nämlich $A(x)=A_1(x)\cdot A_1^*(x)$. Da $A_1(x)$ und $A_1^*(x)$ nur vom Grade $2^{\mu-1}P$ sind, kann man für sie den Satz als bewiesen annehmen. Von den $\nu$ durch reelle Radikale darstellbaren Wurzeln, die $A(x)=0$ besitzt, mögen $\nu'$ der Gleichung $A_1(x)=0$ und $\nu''$ der Gleichung $A_1^*(x)=0$ genügen. Dann hat $A_1(x)=0$ mindestens $\nu'(P-1)$ und $A_1^*(x)=0$ mindestens $\nu''(P-1)$ imaginäre Wurzeln; also beträgt die Anzahl der imaginären Wurzeln von $A(x)=0$ mindestens $(\nu'+\nu'')(P-1)=\nu(P-1)$. Hiermit ist für $p_{\tau_1}=2$ der Satz bewiesen. Im Falle $p_{\tau_1}>2$ zerfällt $A(x)$ nach dem zweiten Hilfssatz dieses Paragraphen in $p_{\tau_1}$ Faktoren der Grade $\frac{2^\mu P}{p_{\tau_1}}$, von denen nur einer, er sei mit $A_1(x)$ bezeichnet, die reellen, also im besonderen auch die $\nu$ durch reelle Radikale darstellbaren Wurzeln von $A(x)=0$ besitzt, während die $p_{\tau_1}-1$ übrigen Faktoren $\frac{2^\mu P}{p_{\tau_1}}(p_{\tau_1}-1)=2^\mu P-\frac{2^\mu P}{p_{\tau_1}}$ imaginäre Wurzeln von $A(x)=0$ liefern. Betrachtet man die irreduzible Gleichung $A_1(x)=0$ vom Grade $\frac{2^\mu P}{p_{\tau_1}}$, der die $\nu$ durch reelle Radikale darstellbaren Wurzeln genügen, so wird $A_1(x)$ durch fortgesetzte Adjunktion reeller Radikale entweder in zwei oder in $p_{\tau_2}>2$ ($p_{\tau_2}$ Primzahl) irreduzible Faktoren zerfallen. Im ersten Fall hat man zwei Gleichungen der Grade $\frac{2^{\mu-1}P}{p_{\tau_1}}$, für die unser Satz als bewiesen angesehen werden kann. Mithin hat $A_1(x)=0$ seinem Grade $\frac{2^\mu P}{p_{\tau_1}}$ entsprechend mindestens $\nu\left(\frac{P}{p_{\tau_1}}-1\right)$ imaginäre Wurzeln, also beträgt ihre Zahl für $A(x)=0$ mindestens $2^\mu P-\frac{2^\mu P}{p_{\tau_1}}+\nu\left(\frac{P}{p_{\tau_1}}-1\right)$. Die Anzahl der reellen, also im besonderen der $\nu$ durch reelle Radikale darstellbaren, und der imaginären $\nu\left(\frac{P}{p_{\tau_1}}-1\right)$ Wurzeln von $A_1(x)=0$ kann den Grad $\frac{2^\mu P}{p_{\tau_1}}$ von $A_1(x)=0$ nicht übersteigen; daher ist $\nu+\nu\left(\frac{P}{p_{\tau_1}}-1\right)\leqq\frac{2^\mu P}{p_{\tau_1}}$, also $\nu\leqq 2^\mu$. Die Anzahl der imaginären Wurzeln von $A(x)=0$ ist demnach $2^\mu P-\frac{2^\mu P}{p_{\tau_1}}+\nu\left(\frac{P}{p_{\tau_1}}-1\right)=2^\mu\left(P-\frac{P}{p_{\tau_1}}\right)$

$+\nu\left(\frac{P}{p_{\tau_1}}-1\right)\geqq\nu\left(P-\frac{P}{p_{\tau_1}}\right)+\nu\left(\frac{P}{p_{\tau_1}}-1\right)$, also mindestens gleich $\nu(P-1$

Ist $p_{\tau_2}>2$, so zerfällt $A_1(x)$ in $p_{\tau_2}$ Faktoren der Grade $\frac{2^\mu P}{p_{\tau_1}p_{\tau_2}}$, vo

denen nur einer — er sei mit $A_2(x)$ bezeichnet — reelle, also auch di

$\nu$ durch reelle Radikale darstellbaren Wurzeln besitzt, während die andere

Faktoren $\frac{2^\mu P}{p_{\tau_1}p_{\tau_2}}(p_{\tau_2}-1)=\frac{2^\mu P}{p_{\tau_1}}-\frac{2^\mu P}{p_{\tau_1}p_{\tau_2}}$ imaginäre Wurzeln liefern. $A(x)=$

hat demnach mindestens $2^\mu P-\frac{2^\mu P}{p_{\tau_1}}+\frac{2^\mu P}{p_{\tau_1}}-\frac{2^\mu P}{p_{\tau_1}p_{\tau_2}}=2^\mu P-\frac{2^\mu P}{p_{\tau_1}p_{\tau_2}}$ imagi

näre Wurzeln. Operiert man mit der irreduziblen Gleichung $A_2(x)=$

des Grades $\frac{2^\mu P}{p_{\tau_1}p_{\tau_2}}$ weiter, indem man wieder reelle Radikale mit Primzahl

exponenten adjungiert, so kann man für die reellen Wurzeln vo

$A(x)=0$, also insbesondere für die $\nu$ nach Voraussetzung durch reell

Radikale darstellbaren, entweder einmal auf eine irreduzible Gleichung

$2^\mu P'$-ten $\left(P'=\frac{P}{p_{\tau_1}p_{\tau_2}\cdots}, P'\text{ ungerade Zahl}\right)$ Grades kommen, die in zwe

irreduzible Faktoren des Grades $2^{\mu-1}P'$ zerfällt, oder man gelangt zu eine

Gleichung $2^\mu$-ten Grades. Im ersten Fall hat man, da der Satz fü

Gleichungen $2^{\mu-1}P'$-ten Grades als bewiesen angesehen werden kann

$\nu(P'-1)$ imaginäre Wurzeln; diese treten zu den $2^\mu P-2^\mu P'$ imaginären

Wurzeln hinzu, die durch die übrigen Faktoren von $A(x)$ geliefert

werden, so daß sich für $A(x)=0$ insgesamt mindestens $2^\mu P-2^\mu P'$

$+\nu(P'-1)$ imaginäre Wurzeln ergeben. Eine Gleichung $2^\mu P'$-ten Grades

kann nicht mehr als $2^\mu P'$ Wurzeln besitzen; daher ist $\nu+\nu(P'-1)\leqq 2^\mu P'$,

also $\nu\leqq 2^\mu$. Folglich hat man $2^\mu P-2^\mu P'+\nu(P'-1)=2^\mu(P-P')$

$+\nu(P'-1)\geqq\nu(P-P')+\nu(P'-1)\geqq\nu(P-1)$, also besitzt $A(x)=0$

in diesem Fall mindestens $\nu(P-1)$ imaginäre Wurzeln. Gelangt man

durch fortgesetzte Adjunktion reeller Radikale schließlich zu einer Glei-

chung $2^\mu$-ten Grades für die reellen Wurzeln von $A(x)=0$, so sind

durch die anderen Faktoren $2^\mu P-2^\mu$ imaginäre Wurzeln gesichert. Die

Anzahl der durch reelle Radikale darstellbaren Wurzeln ist mithin $\nu\leqq 2^\mu$;

folglich beträgt die Anzahl der imaginären Wurzeln von $A(x)$ auch in

diesem Falle mindestens $\nu(P-1)$; denn es ist $2^\mu(P-1)\geqq\nu(P-1)$.

Ich gebe noch ein numerisches Beispiel dafür, daß im Fall $\nu<2^\mu$ außer

durch reelle Radikale darstellbaren Wurzeln auch noch andere reelle, aber

nicht durch reelle Radikale darstellbare vorhanden sein können. Nach dem

Schönemann-Eisensteinschen Satz ist $x^6+6x^4-234x^2-54x-3=0$

im absoluten Rationalitätsbereich irreduzibel; die Gleichung läßt sich

schreiben: $(x^3+(3+9\sqrt{3})x+\sqrt{3})(x^3+(3-9\sqrt{3})x-\sqrt{3})=0$, hat

den Grad $2P = 6$ und besitzt $\nu = 1$ durch reelle Radikale, drei weitere reelle, nicht so darstellbare, und $P - 1 = 2$ imaginäre Wurzeln.

Auf die Frage, warum ich mich bei diesen Untersuchungen nicht der Galoisschen Theorie bediene, weise ich auf das Beispiel der zwei Gleichungen $x^2 - 3 = 0$ und $x^2 + 3 = 0$ mit derselben Galoisschen Gruppe, aber mit sehr verschiedenem Charakter inbezug auf die Realität der Wurzeln hin. Die Galoissche Gruppe würde also bei diesen Fragen der Realität der Wurzeln nicht zum Ziele führen.

(Eingegangen am 10. April 1922.)

# Die komplexen Nullstellen der Besselschen Funktionen

Von

Emil Hilb in Würzburg.

---

Hurwitz[1]) hat bewiesen, daß die gerade transzendente Funktion $z^\nu J_{-\nu}(z)$ genau $2[\nu]$ konjugiert komplexe Nullstellen besitzt, wenn $[\nu]$ als größte ganze Zahl in dem stets als positiv, vorübergehend als nicht ganzzahlig angenommenen $\nu$ enthalten ist. Je nachdem $[\nu]$ gerade oder ungerade ist, gibt es unter diesen komplexen Nullstellen keine oder zwei rein imaginäre. Dagegen liegen, soweit mir bekannt ist, über die komplexen Nullstellen der Funktionen $aJ_\nu(z) + bJ_{-\nu}(z)$, wo $a$ und $b$ reelle Zahlen sind, speziell auch über die komplexen Nullstellen von $Y_\nu(z)$ so gut wie keine Resultate vor. Will man hier zu Sätzen über endliche Anzahlen kommen, so muß man sich auf die Halbebene mit positivem reellen Teil in der $z$-Ebene beschränken, für welche also, wenn

$$z = re^{i\Theta}, \tag{1}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leqq \Theta \leqq \frac{\pi}{2} \tag{2}$$

ist. Die so bestimmte Halbebene nennen wir im folgenden I und wir wählen als Hauptwerte der vorkommenden Funktionen diejenigen Zweige, die für reelle $z$ in I reell sind.

Im folgenden sollen nun die in der Theorie der Besselschen Funktionen auftretenden Fragen nach endlich vielen komplexen Nullstellen mit einfachsten Stetigkeitsbetrachtungen gelöst werden. Eine andere Ableitung würde sich aus der Methode ergeben, mit der Falckenberg[2]) und ich die Anzahl der Nullstellen der Hauptzweige der Hankelschen Funktionen bestimmten.

---

[1]) A. Hurwitz, Über die Nullstellen der Besselschen Funktionen, Math. Ann. 33 (1889), S. 246–266.

[2]) H. Falckenberg und E. Hilb, Die Anzahl der Nullstellen der Hankelschen Funktionen, Gött. Nachr., Math. phys. Kl. (1916), S. 190–196.

## § 1.

## Hilfssätze.

Hilfssatz 1. *Zwischen zwei die Null nicht einschließenden reellen oder rein imaginären Nullstellen $z_1, z_2$ einer im Intervalle $\langle z_1, z_2\rangle$ reellen Lösung $y_1$ der Differentialgleichung*

$$\frac{d}{dz} z \frac{dy}{dz} + \left(z - \frac{\nu^2}{z}\right) y = 0 \tag{3}$$

*der Besselschen Funktionen hat jede andere in $\langle z_1, z_2\rangle$ reelle Lösung $y_2$ von (3) genau eine Nullstelle.*

Der Beweis folgt unmittelbar aus

$$z\left[y_1 \frac{dy_2}{dz} - y_2 \frac{dy_1}{dz}\right] = C, \tag{4}$$

wo $C$ eine reelle Konstante ist.

Da ferner

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}}{n!\,\Gamma(\nu+n+1)} \tag{5}$$

keine rein imaginären Nullstellen haben kann, weil in $z^{-\nu} J_\nu(z)$ für rein imaginäres $z$ alle Summanden der rechten Seite von (5) positiv sind und da $e^{\pm\frac{\nu\pi i}{2}} J_\nu(z)$ und $e^{\mp\frac{\nu\pi i}{2}} J_{-\nu}(z)$ für rein imaginäre $z$ reell sind, so folgt aus Hilfssatz 1

Hilfssatz 2. *$J_{-\nu}(z)$ kann höchstens zwei rein imaginäre Nullstellen haben, die übrigens konjugiert sind.*

In entsprechender Weise folgt

Hilfssatz 3. *Zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ und zwischen 0 und $\frac{-\pi}{2}$ kann $J_{-\nu}(z)$ höchstens je eine reelle Nullstelle haben.*

Die kleinste positive Nullstelle der geraden Funktion $z^{-\nu} J_\nu(z)$ ist nämlich größer als $\frac{\pi}{2}$, da in

$$J_\nu(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^{+1} (1-u^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos zu\, du \tag{6}$$

der Integrand für reelle positive $z < \frac{\pi}{2}$ positiv ist.

Wir wollen nun einige Sätze über das asymptotische Verhalten der Nullstellen ableiten und gehen dazu von den in der Halbebene I für große $|z|$ gültigen angenäherten Darstellungen

(7) $J_\nu(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right), \quad J_{-\nu}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z+\frac{2\nu-1}{4}\pi\right)$

aus. Die Wurzeln der Gleichung

(8) $$aJ_\nu(z)+bJ_{-\nu}(z)=0$$

in der Halbebene I liegen, sofern ihr absoluter Betrag groß genug ist, in beliebiger Nähe der entsprechenden Wurzeln der Gleichung

(9) $$a\cos\left(z-\frac{2\nu+1}{4}\pi\right)+b\cos\left(z+\frac{2\nu-1}{4}\pi\right)=0.$$

Sind also $a$ und $b$ reell, so läßt sich eine Zahl $R$ angeben, daß für alle positiven $\nu$, die unterhalb einer festen Zahl $N$ liegen, alle Wurzeln von (8) in I, deren absoluter Betrag $R$ übersteigt, reell sind, da aus einer einfachen Wurzel von (9) bei genügend großem absoluten Betrage nicht zwei konjugiert komplexe, in I gelegene Wurzeln von (8) hervorgehen können. Man kann dieses auch daraus erschließen, daß bei reellen $a$ und $b$ nach Hilfssatz 1 eine reelle Wurzel von (8) zwischen zwei reellen positiven Wurzeln von $J_\nu(z)$ liegen muß, wodurch die aus (9) bei genügend großem absoluten Betrage angenähert erhaltenen Nullstellen von (8) alle eingeordnet sind. Es gilt also

Hilfssatz 4. *Für alle positiven $\nu$ unterhalb einer festen Zahl $N$ gibt es eine Zahl $R$, daß* (8) *bei reellen $a$ und $b$ in der Halbebene* I *keine komplexen Wurzeln vom absoluten Betrag größer als $R$ hat.*

Da $z^\nu J_{-\nu}(z)$ eine ganze gerade Funktion ist, so folgt

Hilfssatz 5. *Die komplexen Nullstellen von $J_{-\nu}(z)$ liegen für $\nu<N$ dem absoluten Betrage nach unterhalb einer festen Zahl $R$.*

Wir beweisen schließlich

Hilfssatz 6. *Ist $\nu$ keine ganze Zahl, sind $a$ und $b$ reell, aber $a\neq 0$, so hat* (8) *keine rein imaginäre Wurzel $\xi i$.*

Wäre nämlich

(10) $$a(\xi i)^{2\nu}\frac{J_\nu(\xi i)}{(\xi i)^\nu}+b(\xi i)^\nu J_{-\nu}(\xi i)=0,$$

wobei nach (5) $\frac{J_\nu(\xi i)}{(\xi i)^\nu}$ und $(\xi i)^\nu J_{-\nu}(\xi i)$ reell sind, so wäre

(11) $$a\sin\nu\pi\,\frac{J_\nu(\xi i)}{(\xi i)^\nu}=0$$

als imaginärer Teil der linken Seite von (10), was aber unter den gemachten Voraussetzungen unmöglich ist, da $J_\nu(z)$ bei positivem $\nu$ keine imaginären Nullstellen hat.

## § 2.

## Beweis des Satzes von Hurwitz.

$z^\nu J_{-\nu}(z)$ ist eine ganze transzendente Funktion von $z$, die, wenn $\nu$ gleich einer ganzen Zahl $k$ ist, in $(-1)^k z^k J_k(z)$ übergeht, also nach (5) in $z=0$ eine $2k$-fache Nullstelle hat. Alle Nullstellen von $J_k(z)$ sind reell[3]). Lassen wir nun $\nu$ von $k$ aus stetig wachsen, so kann $z^\nu J_{-\nu}(z)$ komplexe Wurzeln entweder durch Zusammenfallen reeller Wurzeln oder aus dem Unendlichen erhalten.

Das letztere ist wegen Hilfssatz (5) unmöglich. Da $J_{-\nu}(z)$ der Differentialgleichung (3) genügt, so kann es nur in der singulären Stelle $z=0$ eine mehrfache Wurzel haben, $z^\nu J_{-\nu}(z)$ hat aber, wenn $\nu$ keine ganze Zahl ist, einen von Null verschiedenen endlichen Wert in $z=0$. Ist also $[\nu]=k$, so können höchstens die für $\nu=k$ in Null zusammengefallenen $2k$ Nullstellen komplex geworden sein und es müssen auch mindestens $2k-2$ komplex sein, da nach Hilfssatz 3 von den $2k$ in $z=0$ vereinigten Nullstellen, wenn $\nu$ sich von $k$ aus stetig ändert, höchstens eine positiv und eine negativ reell werden kann. Aber auch dieses letztere ist unmöglich, da für $\nu=k+1$ ja $2k+2$ Nullstellen von $z^\nu J_{-\nu}(z)$ nach Null fallen, von denen wegen Hilfssatz 3 nur zwei vorher reell sein konnten. Ist also $\nu$ keine ganze Zahl, $[\nu]=k$, so hat $z^\nu J_{-\nu}(z)$ $2k$ komplexe Wurzeln, die, weil $z^\nu J_{-\nu}(z)$ reelle Koeffizienten hat und gerade ist, zu je vieren die Ecken eines Quadrates mit zu den Achsen parallelen Seiten bilden, es sei denn, daß Nullstellen auf der rein imaginären Achse liegen. Nach Hilfssatz 2 kann es höchstens zwei solche geben, ist also $[\nu]$ ungerade, also $2[\nu]$ nicht durch 4 teilbar, so muß es zwei rein imaginäre Nullstellen geben, während wenn $[\nu]$ gerade ist, es keine rein imaginäre geben kann, da $2[\nu]-2$ nicht durch 4 teilbar ist.

## § 3.

## Komplexe Nullstellen von $aJ_\nu(z)+bJ_{-\nu}(z)$.

Wir nehmen $a$ und $b$ als reell, $b\neq 0$ an und beschränken $z$ auf die Halbebene I mit positivem Realteil. Von

$$y=aJ_\nu(z)+bJ_{-\nu}(z) \tag{12}$$

betrachten wir nur den Hauptwert in I und nehmen an, um nicht auf Bekanntes zurückzukommen, daß $\nu$ eine nicht ganze, aber positive Zahl sei, die wir jetzt als fest annehmen. Wir setzen zunächst $a=0$, dann hat $y$ nach § 2, wenn $[\nu]$ eine gerade Zahl ist, $[\nu]$ komplexe Nullstellen

[3]) N. Nielsen, Handbuch der Zylinderfunktionen, S. 161.

mit positivem Realteil, wenn $[\nu]$ ungerade ist, $[\nu]-1$ solche Nullstellen dazu noch zwei rein imaginäre. — Verändern wir $a$, so kann, sobald $a \neq 0$ (12) nach Hilfssatz 6 keine rein imaginären Nullstellen haben, $z^\nu y$ ist für $z=0$ endlich und von Null verschieden. Wie im § 2 kann sich also bei Abänderung von $a$ die Anzahl der komplexen Nullstellen nicht ändern und wir haben nur noch zu sehen, was bei ungeradem $[\nu]$ aus den beiden rein imaginären Nullstellen $\pm \xi i$ von $J_{-\nu}(z)$ wird, wobei es genügt, $|\varepsilon|$ beliebig klein zu wählen, wenn $\frac{a}{b}=\varepsilon$ gesetzt wird. Wir bestimmen daher die zu $\pm \xi i$ benachbarten Wurzeln $\pm \xi i + \delta$ der Gleichung

$$\varepsilon + \frac{z^\nu J_{-\nu}(z)}{z^\nu J_\nu(z)} = 0, \tag{13}$$

wobei also $|\delta|$ mit $|\varepsilon|$ nach Null konvergiert. Wir bezeichnen nun mit $\equiv$ „Gleichheit abgesehen von einem positivem reellen Faktor", dann ist wegen (2) für reelle positive $y$

$$(\pm iy)^\nu J_\nu(\pm iy) \equiv e^{\pm \pi i \nu}, \qquad (\pm iy)^\nu J_{-\nu}(\pm i\,) \equiv -(-y^2+\xi^2), \tag{14}$$

da bei ungeradem $[\nu]$ nach (5) $z^\nu J_{-\nu}(z)$ in Null einen negativen reellen Wert hat. Setzt man daher $\pm \xi i + \delta$ für $z$ in (13) ein, so erhält man bei Vernachlässigung der höheren Potenzen von $\delta$

$$\varepsilon \equiv \pm \frac{2\xi i \delta}{e^{+\pi i \nu}}, \tag{15}$$

also wenn

$$\delta = \delta_1 + i\delta_2, \tag{16}$$

$$\delta_1 \equiv \varepsilon \sin \nu\pi \equiv -\varepsilon, \tag{17}$$

da $[\nu]$ ungerade ist.

Bei ungeradem $[\nu]$ rücken also die beiden rein imaginären Nullstellen in die Halbebene I dann und nur dann hinein, wenn $\frac{a}{b}$ negativ ist, im anderen Falle rücken sie in die andere Halbebene. Man hat also

Satz. *Sind $a$ und $b$ reell, ist ferner $b \neq 0$, so besitzen die Hauptwerte der Funktionen $aJ_\nu(z)+bJ_{-\nu}(z)$ bei geradem $[\nu]$ genau $[\nu]$ komplexe Nullstellen mit positivem Realteil, bei ungeradem $[\nu]$ entweder $[\nu]-1$ oder $[\nu]+1$, je nachdem $\frac{a}{b}$ positiv oder negativ ist.*

## § 4.

## Anzahl der komplexen Nullstellen von $Y_\nu(z)$ in der Halbebene I.

Es ist

$$Y_\nu(z) = \frac{1}{\sin \nu\pi}(\cos \nu\pi J_\nu(z) - J_{-\nu}(z)). \tag{18}$$

st $\nu$ zunächst nicht ganzzahlig, so hat nach § 3 bei geradem $[\nu]$ der Hauptwert von $Y_\nu(z)$ $[\nu]$ komplexe Nullstellen in der Halbebene I, bei ngeradem $[\nu]$ aber $[\nu]-1$ oder $[\nu]+1$ solche Nullstellen, je nachdem $-[\nu]<\frac{1}{2}$, also $\cos\nu\pi<0$ oder $\nu-[\nu]>\frac{1}{2}$, also $\cos\nu\pi>0$ ist. Es aben daher auch, wenn $\nu$ eine ganze Zahl $2n$ oder $2n+1$ wird, $Y_{2n}(z)$ nd $Y_{2n+1}(z)$ in der Halbebene I $2n$ komplexe Nullstellen, da für irgend- ine ganze Zahl $k$

$$) \quad z^k\pi Y_k(z)=2z^kJ_k(z)\ln\frac{z}{2}-\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+2s}}{s!\,(s+k)!}\left(\frac{\Gamma'(s+1)}{\Gamma(s+1)}+\frac{\Gamma'(s+k+1)}{\Gamma(s+k+1)}\right)$$

$$-\sum_{s=0}^{-1}\frac{(n-s-1)!}{s!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2s}$$

ür $z=0$ einen endlichen von Null verschiedenen Wert hat. Gibt man $z$ einen rein imaginären Wert $\xi i$, so wird der rein imaginäre Teil von (19) $(\xi i)^kJ_k(i\xi)\pi i$, ist also, da $J_k(z)$ keine rein imaginären Nullstellen hat, sicher von Null verschieden, so daß unter den $2n$ komplexen Nullstellen von $Y_{2n}(z)$ und $Y_{2n+1}(z)$ in der Halbebene I keine rein imaginären sind. Ebenso folgt, daß die Hauptwerte von $aY_{2n}(z)+bJ_{2n}(z)$ und $aY_{2n+1}(z)$ $+bJ_{2n+1}(z)$ in der Halbebene I genau $2n$ komplexe Nullstellen bei reellen $a$ und $b$ haben.

(Eingegangen am 14. April 1922.)

# Zur Theorie der linearen Differenzengleichungen.

## 2. Mitteilung.

Von

Emil Hilb in Würzburg.

In der ersten Mitteilung[1]) haben wir die Lösung der als Beispiel herausgegriffenen Differenzengleichung

$$(ax+b)f(x+1)+(cx+d)f(x)=g(x) \tag{1}$$

durch Grenzbedingungen der Form

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|\Delta^n f(x)|}<q \tag{2}$$

festgelegt, wo $\Delta$ irgendeine geeignete distributive Operation, $q$ eine entsprechend gewählte Konstante ist. Wählt man als solche Operation speziell

$$E(f(x))=f(x+1), \tag{3}$$

so erhält man, wenn

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|g(c+n)|}<\frac{|c|}{|a|} \tag{4}$$

ist,

$$f(x)=\frac{g(x)}{cx+d}-\frac{ax+b}{(cx+d)(cx+d+c)}g(x+1)+\frac{(ax+b)(ax+b+a)}{(cx+d)(cx+d+c)(cx+d+2c)}g(x+$$

als einzige Lösung von (1), für welche

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|f(x+n)|}<\frac{|c|}{|a|} \tag{6}$$

ist. In der so gewonnenen Lösung von (1) haben wir das Analogon der Nörlundschen[2]) Hauptlösung für die Differenzengleichungen

$$f(x+1)\pm f(x)=g(x). \tag{7}$$

---

[1]) Math. Zeitschrift **14** (1922), S. 211–229.

[2]) Vgl. die in I zitierte Arbeit von Nörlund.

Ist nun für (1) die Bedingung (4) nicht erfüllt, so entsteht nach örlund die Frage, ob man nicht durch geeignete Summation aus (5) otzdem eine brauchbare Lösung erhält. Die Diskussion dieser Frage r beliebige Differenzengleichungen mit rationalen Koeffizienten, aller- ngs noch unter einer in § 2 angegebenen Einschränkung, bildet die ufgabe dieser zweiten Mitteilung. Durch Einführung eines geeigneten arameters $\lambda$, wie man es bei den Integralgleichungen längst gewohnt t, gelingt die Zurückführung dieser Frage auf bekannte Fragen der unktionentheorie. Läßt man aber die eben erwähnte Einschränkung llen, so müssen, wie mir scheint, erst die entsprechenden Sätze der unktionentheorie ausgebaut werden, worauf ich daher erst in einer der lgenden Mitteilungen zurückkommen möchte.

## § 1.

## Behandlung des einfachsten Falles.

Wir betrachten die Differenzengleichung

$$f(x)+\lambda f(x+1)=g(x).$$

ann ergibt die allgemeine Theorie, die in unserer ersten Mitteilung, lerdings nur, wie erwähnt, an (1) durchgeführt wurde (vgl. die Behand- ng des allgemeinen Falles im folgenden Paragraph), unmittelbar:

Ist

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|g(x+n)|}<\frac{1}{|\lambda|},$$

ist

$$f(x)=g(x)-\lambda g(x+1)+\lambda^2 g(x+2)-\dots$$

e einzige Lösung von (8), für welche

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|f(x+n)|}<\frac{1}{|\lambda|}$$

t. Ist dagegen

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|g(x+n)|}\geqq\frac{1}{|\lambda|},$$

kann man über die Existenz der durch das Funktionselement (10) defi- erten Funktion in bezug auf $\lambda$ eben genau das aussagen, was man ber das Verhalten einer Potenzreihe auf dem Konvergenzkreis oder über e Frage weiß, wann ein gegebenes $\lambda$ dem zu (10) gehörigen Hauptstern der $\lambda$-Ebene angehört. Die wichtigsten hier in Betracht kommenden ätze finden sich in dem Referat von Bieberbach in der math. Enc. II 4 S. 460–487 zusammengestellt. Um dem nicht von vornherein orien- erten Leser einen Begriff von der Art dieser Sätze zu geben, greife ich

den bei Bieberbach l. c. S. 467 mitgeteilten Satz von Wigert hera
Damit (10) eine ganze Funktion von $\frac{\lambda}{1+\lambda}$ definiert, ist notwendig u
hinreichend, daß $g(x)$ eine ganze Funktion ist, die höchstens dem Minim
typus der Ordnung Eins angehört. In diesem Falle liefert also die du
das Funktionselement (10) gegebene Funktion eine Lösung von (8), au
für $\lambda = -1$.

Nörlund hat nun die über das Verhalten der Reihen (10) auf d
Konvergenzkreis bekannten Sätze durch Anwendung der Euler-Maclauri
schen Summenformel vermehrt, speziell auch für den Fall, daß $g(x)$
$x > a$ $m$-mal differenzierbar ist und $\int_a^\infty g^{(m)}(x)\,dx$ absolut konvergiert.

Der einfache Zusammenhang mit der Funktionentheorie, der du
Einführung des Parameters $\lambda$ evident wird, ist, soviel ich sehe, von Nörlu
nicht explizite hervorgehoben; im Gegenteil, er trennt streng die Fäl
in denen in (7) das $+$- oder $-$ -Zeichen gilt, was nur dann Bedeutu
hat, wenn $\lambda = -1$ singuläre Stelle auf dem Konvergenzkreis ist.

Ferner zeigt Nörlund, daß man durch Abziehen einer Konstant
die bei unserem hier eingenommenen Standpunkt derart von $\lambda$ abhän
daß sie geeignet $\infty$ wird, wenn $\lambda$ nach $-1$ rückt, das Unendlichwerd
von (10) in bestimmten Fällen kompensieren kann.

## § 2.

## Die Hauptlösung einer beliebigen Differenzengleichung mit ganzen rationalen Koeffizienten.

Wir wenden uns jetzt zu der Differenzengleichung

$$(13) \qquad \sum_{\nu=0}^{m} \lambda^\nu P_\nu(x) f(x+\nu) \equiv \sum_{\nu=0}^{m} \lambda^\nu \sum_{p=0}^{n} a_{\nu p} x^p f(x+\nu) = g(x),$$

worin also die $P_\nu(x)$ Polynome in $x$ vom Grade $n$ sind. Durch wied
holte Anwendung des $E$-Prozesses, d. h. durch wiederholtes Ersetzen von
durch $x+1$ erhält man für die Unbekannten

$$(14) \qquad f(x+k) = \xi_k \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots$$

die Gleichungen

$$(15) \qquad \sum_{\nu=0}^{m} \lambda^\nu \sum_{p=0}^{n} a_{\nu p} (x+k)^p \xi_{\nu+k} = g(x+k), \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots$$

Nach der von uns entwickelten Theorie[3]) suchen wir eine lineare Dif

[3]) Lineare Differentialgleichungen unendlich hoher Ordnung mit ganzen rationa Koeffizienten. Math. Ann. 82 (1920), S. 1–39, insb. S. 3–7; Math. Ann. 84 (192 S. 16–30.

ntialgleichung $n$-ter Ordnung, deren Koeffizienten in der unabhängigen eränderlichen $z$ Polynome des Grades $m$ sind, derart, daß das Rekursions-stem für die Koeffizienten eines als Potenzreihe in $z$ angesetzten Inte-als ein Gleichungssystem ergibt, dessen linke Seite aus der von (15) ırch Vertauschung von Zeilen und Kolonnen entsteht. Man erhält die ilfsdifferentialgleichung

$$\sum_{\mu=0}^{n} \frac{z^\mu}{\mu!} \sum_{\nu=0}^{m} \lambda^\nu z^\nu \sum_{p=0}^{n} a_{\nu p} \Delta^\mu (x^p) \frac{d^\mu \varphi(z)}{dz^\mu} = 1, \tag{16}$$

o allgemein

$$\Delta h(x) = h(x+1) - h(x), \tag{17}$$

so speziell

$$\Delta^\mu (x^p) = 0 \quad \text{für} \quad \mu > p, \quad \Delta^\mu (x^\mu) = \mu! \tag{18}$$

t. Der Koeffizient der höchsten Ableitung $\frac{d^n \varphi(z)}{dz^n}$ in (16) ist

$$z^n \sum_{\nu=0}^{m} a_{\nu n} \lambda^\nu z^\nu = z^n \gamma(\lambda z); \tag{19}$$

nd $z_1, z_2, \ldots, z_m$ die dem absoluten Betrage nach geordneten Wurzeln er Gleichung

$$\gamma(z) = \sum_{\nu=0}^{m} a_{\nu n} z^\nu = 0, \tag{20}$$

o hat die Differentialgleichung (16) außer Null die singulären Stellen

$$\frac{z_1}{\lambda}, \frac{z_2}{\lambda}, \ldots, \frac{z_m}{\lambda}.$$

Wir machen nun die *wesentliche Voraussetzung*

$$a_{0n} \neq 0, \tag{21}$$

ann ist $z = 0$ eine singuläre Stelle der Bestimmtheit, für welche die eterminierende Fundamentalgleichung für die Exponenten $r$

$$\sum_{\mu=0}^{n} a_{0\mu} (x+r)^p = 0 \tag{22}$$

t. Wir machen vorübergehend die weitere Annahme, es sei $x$ so ge-ählt, daß (22) weder für $r = 0$, noch für eine ganze positive Zahl er-üllt sei, so daß die (16) entsprechende homogene Differentialgleichung ein in $z = 0$ reguläres Integral, (16) selbst also höchstens ein einziges olches Integral hat. Dieses setzen wir nun in der Form

$$\varphi(z) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \varphi_\sigma \lambda^\sigma z^\sigma \tag{23}$$

n, dann erhält man für die $\varphi_\sigma$ das Rekursionssystem

$$(24)\qquad \sum_{\varrho=0}^{k}(\varphi_{k-\varrho}\lambda^{k-\varrho})\lambda^{\varrho}\Big[\sum_{p=0}^{n}a_{\varrho p}x^{p}+\binom{k-\varrho}{1}\Delta\Big(\sum_{p=0}^{n}a_{\varrho p}x^{p}\Big)+\dots$$

$$+\binom{k-\varrho}{n}\Delta^{n}\Big(\sum_{p=0}^{n}a_{\varrho p}x^{p}\Big)\Big]=\delta_{0k}\quad(k=0,1,2,\dots$$

oder nach einer bekannten Formel der Differenzenrechnung

$$(25)\qquad \sum_{\varrho=0}^{k}\varphi_{k-\varrho}\lambda^{k-\varrho}\lambda^{\varrho}\sum_{p=0}^{n}a_{\varrho p}(x+k-\varrho)^{p}=\delta_{0k}\quad(k=0,1,2,\dots$$

wo $\delta_{00}=1$, sonst $\delta_{0k}=0$ ist, wo ferner $a_{\varrho p}=0$ für $\varrho>m$. Spezie ist also

$$(26)\qquad \varphi_0=\frac{1}{\sum_{p=0}^{n}a_{0p}x^{p}},\quad \varphi_1=-\frac{\sum_{p=0}^{n}a_{1p}x^{p}}{\sum_{p=0}^{n}a_{0p}x^{p}\sum_{p=0}^{n}a_{0p}(x+1)^{p}}\ \text{usf.}$$

Die Reihe (23) konvergiert als Lösung von (16) für

$$(27)\qquad |z|<\frac{|z_1|}{|\lambda|}.$$

Es entspricht jetzt tatsächlich (25) dem Gleichungssystem (15) in d gewünschten Weise, so daß wie l. c.[3]) folgt:

*Ist*

$$(28)\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|g(x+n)|}<\frac{|z_1|}{|\lambda|},$$

*so hat die Differenzengleichung* (13) *eine und nur eine Lösung* $f(x$ *für welche*

$$(29)\qquad \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|f(x+n)|}<\frac{|z_1|}{|\lambda|}$$

*und zwar ist diese Lösung*

$$(30)\quad f(x)=\sum_{\sigma=0}^{\infty}\varphi_\sigma\lambda^{\sigma}g(x+\sigma)=\frac{g(x)}{\sum_{p=0}^{n}a_{0p}x^{p}}\ \frac{g(x+1)\sum_{p=0}^{n}a_{0p}x^{p}}{\sum_{p=0}^{n}a_{0p}x^{p}\sum_{p=0}^{n}a_{0p}(x+1)^{p}}\ \lambda+\dots$$

In den oben ausgeschlossenen Punkten $x$ verschwinden hier auftreten Nenner.

Es hängen nun die Größen $\varphi_\sigma$ zwar von $x$, aber nicht von $\lambda$ ab, hat daher die durch die Reihe

$$(31)\qquad \sum_{\sigma=0}^{\infty}\varphi_\sigma\lambda^{\sigma}$$

dargestellte Funktion nur die singulären Stellen $z_1, z_2, \dots, z_m$, von den natürlich einige zusammenfallen können. Wir nehmen nun an, es sei (2

cht erfüllt und fassen $f(x)$ als analytische Funktion von $\lambda$ auf. Dann lgt aus dem Hadamardschen Multiplikationssatz der Fundamentalsatz:

*Hat bei festem $x$ die Funktion*

2) $$\sum_{\sigma=0}^{\infty} \lambda^{\sigma} g(x+\sigma)$$

*in der ganzen $\lambda$-Ebene" die singulären Stellen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, so hat die unktion*

3) $$f(x) = \sum_{\sigma=0}^{\infty} \varphi_{\sigma} \lambda^{\sigma} g(x+\sigma)$$

*der $\lambda$-Ebene höchstens in den Punkten $\lambda_\mu z_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, m$; $\mu = 1, 2, \ldots$) nguläre Stellen.*

Auf den Fall, daß (21) nicht erfüllt ist, daß also (23) im allgemeinen r jedes $z$ divergiert, hoffe ich in einer der folgenden Mitteilungen zurück- ommen zu können.

(Eingegangen am 14. April 1922.)

# Über Gebiete gleichmäßiger Konvergenz Dirichletsche Reihen.

Von

Ludwig Neder in Leipzig.

Über die gleichmäßige Konvergenz Dirichletscher Reihen in Ge bieten, die an den Rand der Konvergenzhalbebene heranreichen, besitz man,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \text{ für } s = 0 \text{ konvergent} \tag{1}$$

vorausgesetzt, durch die Herren O. Perron[1]) bzw. E. Cahen[2]) folgend beiden grundlegenden Sätze:

Satz 1. *Die Dirichletsche Reihe* (1) *konvergiert gleichmäßig i jedem Gebiete*

$$\sigma \geqq 1, \quad |t| \leqq e^{k\sigma}, \tag{2}$$

*wo* $k > 0$ *beliebig gegeben ist.*

Satz 2. *Die Dirichletsche Reihe* (1) *konvergiert gleichmäßig i jedem Winkelraum*

$$0 < \sigma \leqq 1, \quad |t| \leqq k\sigma, \tag{3}$$

*wo* $k > 0$ *beliebig gegeben ist.*

Bei der Bedeutung, die diesen beiden Sätzen zukommt, ist die Frag am Platze, ob dieselben einer Verschärfung fähig sind, indem man in (2 die Konstante $k$ ersetzt durch eine geeignete Funktion $\omega(\sigma)$, wo

$$\omega(\sigma) > 0 \quad \text{für} \quad \sigma \geqq 1, \quad \text{und} \quad \overline{\lim_{\sigma=\infty}} \omega(\sigma) = \infty, \tag{4}$$

bzw. in (3) die Konstante $k$ durch $\omega(1/\sigma)$, wo wiederum (4) gilt.

---

[1]) Zur Theorie der Dirichletschen Reihen [Journ. f. d. reine u. angew. Math 134 (1908), S. 95], auf S. 106–109 (implizit).

[2]) Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et sur des fonctions analogues [Thèse Paris 1894, auch Ann. de l'école norm. (3) **11** (1894), S. 75] in Nr. 7 (in allen wesentlichen).

*Die Antwort lautet in beiden Fällen verneinend, jedoch in sehr erschiedenem Sinne,* und ist durch folgende beiden Sätze gegeben:

Satz 3. a) *Zu jedem λ-Typus gibt es eine passende Funktion* (4) *er Art, daß sogar*

$$\lim_{\sigma=\infty} \omega(\sigma) = \infty \tag{5}$$

*st, und jede Reihe* (1) *jenes Typus im zugehörigen Gebiete*

$$\sigma \geqq 1, \quad |t| \leqq e^{\sigma\omega(\sigma)} \tag{6}$$

*leichmäßig konvergiert.*

b) *Dagegen gibt es zu jeder gegebenen Funktion* (4) *einen λ-Typus nd von diesem eine Reihe* (1), *die im zugehörigen Gebiete* (6) *un-leichmäßig konvergiert.*

Satz 4. *Es gibt einen λ-Typus, nämlich den Typus $\lambda_n = n$ der Potenzreihen ohne konstantes Glied, welcher zu jeder gegebenen Funk-ion* (4) *eine Reihe* (1) *enthält, die im zugehörigen Gebiete*

$$0 < \sigma \leqq 1, \quad |t| \leqq \sigma\omega(1/\sigma) \tag{7}$$

*ngleichmäßig konvergiert.*

Wir geben nachstehend im § 1 den Beweis des Satzes 3.

Den Satz 4 hat bereits Herr I. Schur[3]) im Rahmen einer allge-neinen Theorie als Spezialfall erhalten.

Wegen der Analogie mit dem zu Satz 3b konstruierten Beispiel eben wir im § 2 einen direkten Beweis durch ein einfaches Beispiel.

## § 1.

Beweis des Satzes 3. a) Zunächst darf man ohne Einschränkung er Allgemeinheit $\lambda_1 > 0$ voraussetzen.

Ferner nehmen wir als „passende" Funktion (4) im Sinne der Be-auptung

$$\omega(\sigma) = \lambda_m \quad \text{für} \quad \sigma \geqq 1,$$

obei

$$m = [e^{\lambda_1 \sigma}], \quad \text{also} \quad 1 \leqq m \leqq e^{\lambda_1 \sigma}.$$

ann gilt (4) und (5).

Endlich genügt es zu beweisen, daß für

$$C_n = c_1 + \ldots + c_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

us der Voraussetzung

$$|C_n| \leqq C \tag{8}$$

[3]) Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen [Journ. d. reine u. angew. Math. **151** (1921), S. 79], vgl. S. 108, Zeile 12ff.

folgt, daß bei unserer Wahl von $\omega(\sigma)$ im zugehörigen Gebiete (6) gleichmäßig die Abschätzung gilt

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n s} \right| \leqq 4C.$$

Denn man braucht dieses Ergebnis nur auf

$$c_n = \begin{cases} 0 & \text{für } n \leqq r \\ a_n & \text{für } n > r \end{cases}$$

anzuwenden, um die Behauptung zu erhalten.

Nun ist bekanntlich bei jeder Dirichletschen Reihe unter der Voraussetzung (8) für $\sigma > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\lambda_n s} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n (e^{-\lambda_n s} - e^{-\lambda_{n+1} s}) = \sum_{n=1}^{m} + \sum_{n=m+1}^{\infty},$$

wo $m$ die obige Bedeutung hat. In unserem Gebiete (6) wird daher der Betrag der linken Seite

$$\begin{aligned} &\leqq C \cdot \sum_{n=1}^{m} (e^{-\lambda_n \sigma} + e^{-\lambda_{n+1} \sigma}) + C \cdot \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{|s|}{\sigma} (e^{-\lambda_n \sigma} - e^{-\lambda_{n+1} \sigma}) \\ &\leqq C \cdot 2m e^{-\lambda_1 \sigma} + C \cdot (1 + |t|) e^{-\lambda_m \sigma} \\ &\leqq 2C + C e^{-\lambda_m \sigma} + C e^{(\omega(\sigma) - \lambda_m)\sigma} \leqq 4C, \end{aligned}$$

wie behauptet.

b) Bei gegebener Funktion (4) gibt es im zugehörigen Gebiete (6) eine Punktfolge $s_\nu = \sigma_\nu + i t_\nu$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ mit

$$\sigma_\nu \geqq 1, \quad \sigma_\nu \to \infty, \quad \lim_{\nu = \infty} \frac{\log t_\nu}{\sigma_\nu} = \infty.^{4})$$

Wie man durch Auswahl einer passenden Teilfolge erkennt, darf man annehmen

$$\frac{\log t_\nu}{\sigma_\nu} \geqq 2(\nu + 1).$$

Setzt man dann

$$m_\nu = [t_\nu],$$

so lautet unser Beispiel

$$(9) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} e^{-\nu(s+\sigma_\nu)} \sum_{\mu=0}^{m_\nu - 1} (e^{i - s/m_\nu})^\mu.$$

Dies ist formal eine Dirichletsche Reihe, bei der für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ die Glieder mit $\nu \leqq \lambda_n < \nu + 1$ zu einer Gruppe zusammengefaßt sind.

---

[4]) Nur dies wird benutzt. Wir beweisen also etwas mehr als behauptet.

Unsere Dirichletsche Reihe konvergiert für $s=0$, und sogar überall. Denn es ist bei festem $s$ und $m \leqq m_\nu$ für alle großen $\nu$

$$|R| = \left| \sum_{\mu=0}^{m-1} (e^{s-s/m_\nu})^\mu \right| \leqq \frac{1+e^{|\sigma|}}{|1-e^{s-s/m_\nu}|} \leqq 3e^{|\sigma|},$$

also

$$|e^{-\nu(s+\sigma_\nu)} R| \leqq e^{-\nu} \cdot 3e^{|\sigma|},$$

und daher einerseits in (9) die $\sum_\nu$ konvergent, andererseits

$$\Omega_\nu = \underset{\nu \leqq \lambda_r < \nu+1}{\text{Maximum}} \left| \sum_{\nu \leqq \lambda_n \leqq \lambda_r} a_n e^{-\lambda_n s} \right| \to 0. \tag{10}$$

Und es konvergiert unsere Dirichletsche Reihe ungleichmäßig bereits in der Menge der $s_\nu$. Denn es ist

$$i - \frac{s_\nu}{m_\nu} = i - \frac{\sigma_\nu + i(m_\nu + \vartheta)}{m_\nu} = -\frac{\sigma_\nu}{m_\nu} - i\frac{\vartheta}{m_\nu} \quad (0 \leqq \vartheta < 1)$$

und daher

$$\left| \sum_{\nu \leqq \lambda_n < \nu+1} a_n e^{-\lambda_n s_\nu} \right| = e^{-2\nu\sigma_\nu} \left| \sum_{\mu=0}^{m_\nu - 1} e^{-\sigma_\nu \mu/m_\nu - i\vartheta\mu/m_\nu} \right|$$

$$\geqq e^{-2\nu\sigma_\nu} \sum_{\mu=0}^{m_\nu - 1} e^{-\sigma_\nu \mu/m_\nu} \cos \vartheta\mu/m_\nu$$

$$\geqq e^{-2\nu\sigma_\nu} \cdot m_\nu \cdot e^{-\sigma_\nu} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\geqq e^{-2\nu\sigma_\nu + \frac{1}{2}(\nu+1)\sigma_\nu - \sigma_\nu + O(1)} = e^{\sigma_\nu + O(1)} \to \infty,$$

was die gleichmäßige Konvergenz ausschließt.

## § 2.

Beweis des Satzes 4. Bei gegebener Funktion (4) gibt es im zugehörigen Gebiete (7) eine Punktfolge $s_\nu = \sigma_\nu + it_\nu$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ mit

$$\sigma_\nu > 0, \quad t_\nu \to 0, \quad \lim_{\nu=\infty} \frac{t_\nu}{\sigma_\nu} = \infty.^{4})$$

Wie man durch Auswahl einer passenden Teilfolge erkennt, darf man annehmen

$$\frac{t_\nu}{\sigma_\nu} \geqq 4\nu^3 \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sigma_\nu} \geqq 1 + \frac{1}{\sigma_1} + \ldots + \frac{1}{\sigma_{\nu-1}}.$$

Setzt man dann

$$m_\nu = \left[\frac{1}{\sigma_\nu}\right],$$

so lautet unser Beispiel

$$(11) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \sigma_\nu e^{-(m_1+\ldots+m_{\nu-1})s} \sum_{\mu=0}^{m_\nu-1} (e^{s_\nu - s})^\mu .$$

Dies ist formal eine Potenzreihe, bei der für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ die Glieder mit $m_1 + \ldots + m_{\nu-1} \leqq n < m_1 + \ldots + m_\nu$ zu einer Gruppe zusammengefaßt sind, die wir $Q_\nu(s)$ nennen.

Unsere Potenzreihe konvergiert für $s = 0$. Denn es ist bei $m \leqq m_\nu$ für alle großen $\nu$

$$|S| = \left| \sum_{\mu=0}^{m-1} (e^{s_\nu})^\mu \right| \leqq \frac{1 + e^{\sigma_\nu m_\nu}}{|1 - e^{s_\nu}|} \leqq \frac{4}{|s_\nu|} \leqq \frac{4}{t_\nu},$$

also

$$|\nu \sigma_\nu S| \leqq 4\nu \frac{\sigma_\nu}{t_\nu} \leqq \frac{1}{\nu^2},$$

und daher einerseits in (11) die $\sum_\nu$ konvergent, andererseits auch das Analogon zu (10) erfüllt.

Und es konvergiert unsere Potenzreihe ungleichmäßig bereits in der Menge der $s_\nu$. Denn es ist

$$|Q_\nu(s_\nu)| = \nu \sigma_\nu m_\nu e^{-(m_1+\ldots+m_{\nu-1})\sigma_\nu} \geqq \nu \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-1} \to \infty,$$

was die gleichmäßige Konvergenz ausschließt.

Leipzig, den 13. Mai 1922.

(Eingegangen am 13. Mai 1922.)

# Sur les déterminants cayléens et bicayléens anormaux.

Par

Maurice Lecat (Louvain).

---

**1.** On appelle *déterminant* (généralisé)[1]), à $n$ dimensions ou *de classe n*, l'une matrice de $n^p$ éléments à $n$ indices, une fonction déduite du *permanent* de cette matrice en affectant chacun des termes de celui-ci d un signe donné par $(-1)$ élevé à une puissance dont l'exposant est le nombre total des inversions dans des rangées d'indices, en nombre pair $\nu$, désignées d'avance par leurs *rangs*. Ceux-ci sont dits *signants*, ainsi que les indices occupant ces rangs et que l'on surmonte parfois de la marque $\frown$; tandis que les autres rangs, ainsi que les indices qui y figurent et que l'on affecte toujours de $\smile$, sont dits *non-signants*. L'*espèce* (paire) du déterminant est le nombre $\nu$ des *signances*, celui des *non-signances* étant $n - \nu$. Si $\nu = 0$, on a le *permanent* (qui est un déterminant sans signance); si $\nu = n$ (paire) on a le *persignant*[2]) (qui n'a pas de non-signance). Une matrice de classe $n$ possède $\binom{n}{2\alpha}$ déterminants d'espèce $2\alpha$ et conséquemment, $\delta_{r,s}$ désignant le symbole de Kronecker,

$$\delta_{1,(-1)^n} \sum_{\alpha=0}^{n:2} \binom{n}{2\alpha} + \delta_{1,(-1)^{n-1}} \sum_{\alpha=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n}{2\alpha} = 2^{n-1}$$

déterminants (permanent y compris). Des déterminants d'une même matrice peuvent être appelés des *codéterminants*.

---

[1]) L.-H. Rice, *P*-way determinants, American J. math. **40**, 1918, pp. 242—262, partic. pp. 246 et suiv. Cf. M. Lecat, Sur une généralisation des déterminants etc., Annales Soc. scient. Bruxelles **39**, 1919—1920, seconde partie, pp. 10—20.

[2]) *Full-sign determinant* de L.-H. Rice.

Une *cayléenne*[2a]) de deux matrices, $M_1$ et $M_2$, d'ordre $p$, est une matrice de cet ordre et dont certains déterminants, les *cayléens normaux* qui sont de la forme[3])

$$\sum_{\varrho=1}^{n} b(\breve{a}_1, \ldots, \breve{a}_\sigma; \hat{a}_{\sigma+1}, \ldots, \hat{a}_{s-1}; \varrho)\, h(\breve{a}_s, \ldots, \breve{a}_{s+\tau-1}; \hat{a}_{s+\tau}, \ldots, \hat{a}_{s+t-2}; \varrho$$

expriment, suivant la règle de Cayley-Rice[4]), le produit

$$BH \equiv |b(\breve{\varepsilon}_1, \ldots, \breve{\varepsilon}_\sigma; \hat{\varepsilon}_{\sigma+1}, \ldots, \hat{\varepsilon}_s)|_p \cdot |h(\breve{\omega}_1, \ldots, \breve{\omega}_\tau; \hat{\omega}_{\tau+1}, \ldots, \hat{\omega}_t)|_p$$

d'un déterminant $B$ de $M_1$ par un déterminant $H$ de $M_2$, les nombres $s-\sigma$ et $t-\tau$ étant pairs; *l'indice sommant* $\varrho$ peut occuper n'importe quels rangs, pourvu qu'ils soient signants dans les deux déterminants facteurs (on ne peut multiplier des permanents). La signance des divers indices de ces cayléens est choisie d'après celles des indices de $B$ et de $H$. Les autres cayléens, où l'indice sommant occupe un rang qui était non signant, sont *anormaux*: ils n'expriment plus de simples produits de déterminants des matrices primitives.

L'objet principal de ce travail est d'étudier succinctement ces *valeurs anormales*.

**2.** Si $M_1$ et $M_2$ sont identiques à la matrice $M$, on a affaire aux cayléennes d'*une* matrice $M$ et les *valeurs normales* expriment, à l'exclusion des anormales, des produits de deux codéterminants. Si $M$ est cubique, les cayléennes, de classe 4, sont au nombre de 9; mais, à cause de la permutabilité des deux facteurs de l'élément général (provenant de ce que $BH = HB$), on peut dire qu'elles se réduisent à 6 distinctes et 3, dites *canoniques* et désignées par la notation $(\alpha, \alpha)$, où l'indice sommant occupe un même rang $\alpha$ ($\alpha = 1, 2, 3$) dans les deux facteurs de l'élément entre barres, et 3, dites *acanoniques* et désignées par $(\alpha, \beta)$, où l'indice sommant occupe deux rangs différents, $\alpha$ et $\beta$ (1, 2; 1, 3; 2, 3). Dans tout ce travail, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ désigneront les nombres 1, 2, 3, dans un ordre quelconque.

---

[2a]) On pourrait écrire *cayleyenne*, orthographe adoptée notamment lorsqu'on désigne certaine courbe envisagée par Cayley.

[3]) Comme dans nos autres travaux, nous représentons une matrice ou un déterminant par son *élément général* placé respectivement entre doubles ou simples barres. Au lieu de $d_{i,j,\ldots}$ nous écrivons $d(i, j, \ldots)$ et même, s'il n'y a pas d'équivoque possible, simplement $(i, j, \ldots)$. La lettre $p$ placée au bas de la barre de droite indique l'*ordre*, les indices de la matrice prenant les valeurs 1, 2, ..., $p$.

[4]) A. Cayley, On the notations and properties of certain functions, Trans. Cambridge Philos. Soc. 8, 1842—1849, Part I, pp. 85—88; The Collected Math. Papers 1, Cambridge 1889, pp. 75—79; L.-H. Rice, loc. cit., pp. 250—252.

La permutabilité des facteurs de l'élément général a un autre effet que de rendre des matrices non-distinctes. Car si, dans une cayléenne canonique, on échange les deux facteurs en y respectant les positions des signances, on obtient soit identiquement le même déterminant, soit un codéterminant (de même espèce) qui lui est égal. Cela est impossible dans une matrice acanonique. On peut convenir de considérer comme non-distincts deux codéterminants qui ne diffèrent que par l'ordre des facteurs de l'élément entre barres, les signances étant solidaires des facteurs.

*Chacun des deux facteurs de l'élément général d'un cayléen normal, déterminant d'espèce* 2, *contient une seule signance et la valeur d'un tel cayléen s'obtient en prenant* $D_\alpha$, *déterminant cubique à non-signance de rang* $\alpha$, *pour un facteur où* $\alpha$ *est le rang de la non-signance, et en faisant alors le produit des deux déterminants cubiques ainsi obtenus.* Suivant que la cayléenne est canonique ou non, les 4 cayléens normaux sont distincts ou se réduisent à 3, à cause de la permutabilité des facteurs. Exemples:

$$\left|\sum_{\varrho=1}^{p}(\overset{\times}{\varepsilon}_1, \varrho, \overset{\circ}{\varepsilon}_2)(\overset{\circ}{\varepsilon}_3, \varrho, \overset{\times}{\varepsilon}_4)\right|_p = D_1 D_3, \qquad \left|\sum_{\varrho=1}^{p}(\varrho, \overset{\times}{\varepsilon}_1, \overset{\circ}{\varepsilon}_2)(\overset{\circ}{\varepsilon}_3, \overset{\times}{\varepsilon}_4, \varrho)\right|_p = \begin{cases} D_2^2, \\ D_1 D_3, \end{cases}$$

$$\left|\sum_{\varrho=1}^{p}(\overset{\times}{\varepsilon}_1, \varrho, \overset{\circ}{\varepsilon}_2)(\overset{\times}{\varepsilon}_3, \varrho, \overset{\circ}{\varepsilon}_4)\right|_p = \begin{cases} D_1^2, \\ D_3^2, \end{cases} \qquad \left|\sum_{\varrho=1}^{p}(\varrho, \overset{\times}{\varepsilon}_1, \overset{\circ}{\varepsilon}_2)(\overset{\times}{\varepsilon}_3, \overset{\circ}{\varepsilon}_4, \varrho)\right|_p = \begin{cases} D_1 D_2, \\ D_2 D_3. \end{cases}$$

**3.** Les *cayléens anormaux* sont: le persignant (d'espèce 4), le permanent (d'espèce 0) et les deux déterminants d'espèce 2 où un facteur de l'élément général comporte 2 signances (l'autre facteur ayant 2 non-signances).

*La loi de formation des valeurs anormales est la suivante: on prend* $P$, *valeur du permanent cubique, pour chacun des facteurs (éventuels) à* 2 *non-signances et* $D_\alpha$ *pour chacun de ceux à deux signances,* $\alpha$ *étant, dans le facteur, le rang sommant; ensuite, au produit de ces deux fonctions — produit appelé valeur principale —, on ajoute un complément dont l'expression pour* $p > 2$ *est très compliquée. Pour* $p = 2$ *il a une forme simple:* $\pi_{\alpha,\varrho}$ *désignant le permanent, de classe* 2, *de la tranche* $\varrho^{\text{ième}}$ *de rang* $\alpha$ *de la matrice cubique, de sorte que, par exemple,*

$$\overset{+}{|}(\varkappa_1, \varrho, \varkappa_2)\overset{+}{|} = \pi_{\varkappa_1,\varrho}, \qquad (\varkappa_1, \varkappa_2 = 1, 2)$$

*et* $\delta_{\alpha,\varrho}$ *désignant le déterminant correspondant, ce complément vaut* 2 *fois la somme en* $\varrho$ *des produits de* 2 *facteurs obtenus en prenant* $\pi_{\beta,\varrho}$ *ou*

$\delta_{\alpha,\varrho}$ *pour un facteur respectivement à* 2 *ou à* 0 *non-signances,* $\beta$ *ou* $\gamma$ *étant le rang sommant*[4a]).

On voit que les deux valeurs anormales d'espèce 2 d'une même cayléenne sont égales ou non, suivant que les cayléennes sont canoniques ou non[5]). On a donc, en tout, $3 \cdot 3 + 3 \cdot 4$, c'est-à-dire 21 valeurs anormales différentes.

---

[4a]) Dans la matrice cubique d'ordre 3:

$$\left\| \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & a & 0 & e & 0 & f & 0 & i & 0 \\ b & 0 & c & 0 & 0 & 0 & j & 0 & k \\ 0 & d & 0 & g & 0 & h & 0 & l & 0 \end{array} \right\|$$

particularisée par un vide qui laisse actifs tous les éléments non nuls, les trois déterminants ont pour valeurs:

$$\left.\begin{matrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{matrix}\right\} \equiv \left\{ \begin{matrix} - & - & - & - & + & + & + & + \\ -agk & +ahj & -bfl & +cel & -bih & +cgi & -dck & +djf; \\ + & - & + & - & - & + & - & + \end{matrix} \right.$$

et de ses cayléennes, où l'activité a encore lieu pour tous les éléments non nuls, l'une (que nous n'écrirons pas, pour faire court) exprime: a) par chacun de ses deux déterminants anormaux d'espèce 2, la double somme algébrique de carrés

$$2\,[(bgi+dej)^2+(chi+dfk)^2-(agj+bel)^2-(ahk+cfl)^2]$$

augmentée du produit du déterminant $D_1$ par le permanent $P$; b) par le permanent et le persignant, respectivement les sommes de carrés

$$\left.\begin{matrix} P^2 \\ D_1^2 \end{matrix}\right\} + 2\,(bgi+dej \pm agj \pm bel)^2 + 2\,(chi+dfk \pm ahk \pm cfl)^2;$$

dans ces fonctions le complément n'a pas la forme indiquée dans le texte.

[5]) Si l'on appelle *déterminants alliés* d'une matrice de classe paire $n$, deux codéterminants:

$$|(\breve{\varepsilon}_1, \ldots, \breve{\varepsilon}_\nu;\ \hat{\varepsilon}_{\nu+1}, \ldots, \hat{\varepsilon}_n)_p, \quad |(\hat{\varepsilon}_1, \ldots, \hat{\varepsilon}_\nu;\ \breve{\varepsilon}_{\nu+1}, \ldots, \breve{\varepsilon}_n)|_p,$$

tels que les $\nu$ indices signants de l'un sont les $\nu$ indices non-signants de l'autre ($\nu$ étant aussi paire), on peut dire que: des trois couples de cayléens alliés *canoniques* $(\alpha, \alpha)$ de la matrice cubique générale, l'une fournit deux formes équivalentes, normales, du produit $D_\beta D_\gamma$; une autre, constituée de deux valeurs anormales, donne deux expressions identiques d'une même fonction; la troisième, la seule constituée en général de deux valeurs distinctes, exprime les carrés $D_\beta^2$ et $D_\gamma^2$. Les 6 déterminants d'espèce 2 d'une cayléenne canonique ont donc 4 valeurs distinctes. Si la cayléenne $(\alpha, \beta)$ est *acanonique*, de ses 6 déterminants d'espèce 2, trois, dont deux alliés, $D_\alpha D_\gamma$ et $D_\beta D_\gamma$, représentent les produits deux à deux des trois codéterminants cubiques; un autre, allié de $D_\alpha D_\beta$, exprime le carré $D_\gamma^2$; quant aux deux derniers, alliés entre eux, ils sont anormaux et, cette fois, inégaux. On voit ainsi que le produit de deux codéterminants cubiques peut se mettre, mais d'une seule manière, sous forme d'un cayléen d'espèce 2 égal à son allié; et cette propriété n'a lieu que si la matrice primitive est de classe 3, condition pour que le cayléen ait autant

Les cayléens persignant et permanent $(i, j)$ se désignent respectivement par $\Delta_{i,j}$ et par $P_{i,j}$, pour $i = \text{ou} \neq j$; les cayléens anormaux, d'espèce 2, pour la matrice $(i, i)$ par $\sigma_{i,i}$ et pour la matrice $(i, j)$ par $\sigma^{(1)}_{i,j}$ ou $\sigma^{(2)}_{i,j}$ suivant que les non-signances se trouvent dans le facteur où l'indice sommant a le rang $i$ ou $j$. Observons qu'on a: $\sigma^{(2)}_{j,i} = \sigma^{(1)}_{i,j}$.

Si, par exemple, l'ordre $p$ est égal à 2, on peut écrire:

1), 2) $$\left.\begin{matrix}\Delta_{1,1}\\ P_{1,1}\end{matrix}\right\} \equiv \left|\sum_{\varrho=1}^{p} (\varrho, \overset{\circ}{\varepsilon}_1, \overset{\circ}{\varepsilon}_2)\,(\varrho, \overset{\circ}{\varepsilon}_3, \overset{\circ}{\varepsilon}_4)\right|_p = \begin{cases} D_1^2 + 2\sum_{\varrho=1}^{p} \delta_{1,\varrho}^2, \\ P^2 + 2\sum_{\varrho=1}^{p} \pi_{1,\varrho}^2, \end{cases}$$

3), 4) $$\sigma_{2,2} \equiv \left|\sum_{\varrho=1}^{p} (\overset{\circ}{\varepsilon}_1, \varrho, \overset{\circ}{\varepsilon}_2)\,(\overset{\times}{\varepsilon}_3, \varrho, \overset{\times}{\varepsilon}_4)\right|_p = PD_2 + 2\sum_{\varrho=1}^{p} \delta_{2,\varrho}\,\pi_{2,\varrho},$$

5), 6) $$\left.\begin{matrix}\sigma^{(1)}_{1,2}\\ \sigma^{(2)}_{1,2}\end{matrix}\right\} \equiv \left|\sum_{\varrho=1}^{p} (\varrho, \overset{\times}{\varepsilon}_1, \overset{\times}{\varepsilon}_2)\,(\overset{\circ}{\varepsilon}_3, \varrho, \overset{\circ}{\varepsilon}_4)\right|_p = \begin{cases} PD_2 + 2\sum_{\varrho=1}^{p} \pi_{1,\varrho}\,\delta_{2,\varrho}, \\ PD_1 + 2\sum_{\varrho=1}^{p} \pi_{2,\varrho}\,\delta_{1,\varrho}, \end{cases}$$

7) $$P_{2,1} \equiv \left|\sum_{\varrho=1}^{p} (\overset{\times}{\varepsilon}_1, \varrho, \overset{\times}{\varepsilon}_2)\,(\varrho, \overset{\times}{\varepsilon}_3, \overset{\times}{\varepsilon}_4)\right|_p = P^2 + 2\sum_{\varrho=1}^{p} \pi_{2,\varrho}\,\pi_{1,\varrho},$$

8) $$= P_{1,2} \equiv \left|\sum_{\varrho=1}^{p} (\varrho, \overset{\times}{\varepsilon}_1, \overset{\times}{\varepsilon}_2)\,(\overset{\times}{\varepsilon}_3, \varrho, \overset{\times}{\varepsilon}_4)\right|_p = P^2 + 2\sum_{\varrho=1}^{p} \pi_{1,\varrho}\,\pi_{2,\varrho}.$$

Observons que: a) le produit de deux codéterminants (valeur normale) est une différence de deux carrés (qui se réduirait à un seul si les deux codéterminants étaient identiques); b) les cayléens canoniques persignants et permanents (valeurs anormales données dans les exemples 1 et 2) sont des sommes arithmétiques de carrés; c) les cayléens canoniques anormaux d'espèce 2 (exemples 3 et 4) peuvent se mettre sous forme de sommes algébriques de carrés.

Tous ces résultats seront généralisés plus loin.

---

d'indices signants que de non-signants. — L'étude générale des déterminants alliés repose sur leur *décomposition* [cf. M. Lecat, Rendic. Circolo mat. Palermo 44, 1920, pp. 69—81] et surtout sur leur expression en fonction des *sections*, ensembles de termes introduits, dans le cas spécial d'une seule non-signance, par H. W. Lloyd Tanner [Notes on determinants of $n$ dimensions, Proc. London math. Soc., (1) 10 (1878—1879), pp. 167—180] pour former les relations entre les valeurs de codéterminants. Nous nous proposons de consacrer un autre travail à cette question, qui est assez vaste.

**4.** *La règle de Scott-Rice*[6]), pour multiplier, éléments à éléments, des déterminants entre eux (permanents y compris), se formule comme suit

$$|b(\varepsilon_1, \ldots, \overset{\cap\cap}{\varepsilon_r})|_p \cdot |h(\omega_1, \ldots, \overset{\cup\cup}{\omega_s})|_p = |b(a_1, \ldots, \overset{\cap\cup}{a_r})\, h(a_{r+1}, \ldots, a_{r+s-1}; a_r)|_p;$$

les signes surmontant les indices $\varepsilon_r$, $\omega_s$, $a_r$ vont ensemble s'ils ont même altitude; au premier membre, les indices qui ne portent pas les signes $\cap$ $\cup$ sont arbitrairement signants ou non-signants, pourvu que l'espèce soit toujours paire et que la signance des indices respectifs se conserve quand on passe au second membre. L'indice $a_r$, qui se répète, est *l'indice lié*, les autres étant les *indices libres*. Les matrices du second membre sont des *scottiennes* et leurs déterminants des *scottiens*.

Si l'on part de deux matrices cubiques, $M_1$ et $M_2$, leur classe est 5 et il y en a 9 qui se réduisent à 6 distinctes si $M_1$ est identique à $M_2$. Chacune de ces scottiennes possède 16 déterminants. Nous réservons à un autre travail leur étude approfondie; il suffit, pour la suite de ce mémoire, de les avoir définis et de constater que, contrairement aux cayléens, *tous les scottiens sont normaux*[7]), exprimant les 10 seules valeurs $P^2$, $D_i^2$, $PD_i$, $D_iD_j$ $(i, j = 1, 2, 3)$.

**5.** *Le produit de trois déterminants* peut s'effectuer en appliquant a) la règle de Cayley puis celle de Scott, ce qui donne les *cayley-scottiennes*; b) la règle de Scott puis celle de Cayley, d'où les *scott-cayléennes*; c) deux fois la règle de Cayley, d'où les *bicayléennes*; d) enfin deux fois la règle de Scott. Les déterminants qui expriment les produits sont *normaux*, les autres étant: *anormaux* s'ils ne sont pas donnés par les règles de multiplication; *quasi-normaux* s'ils s'expriment normalement par ces règles, mais en fonction de cayléens anormaux. Les matrices formées en appliquant deux fois la règle de Scott n'engendrant que des valeurs normales, comme les scottiennes [cf. n° 4], nous ne les étudierons pas ici.[7a])

---

[6]) R.-F. Scott, On cubic determinants and other determinants of higher class. Proc. London math. Soc., (1) **11** (1879–1880), p. 17–29; L.-H. Rice, loc. cit.

[7]) Signalons cependant que, de la règle de Scott, il résulte ceci: la valeur d'un scottien peut s'obtenir en remplaçant chaque facteur de l'élément général par l'une des quantités $P$, $D_1$, $D_2$, $D_3$, d'après la règle suivante et en faisant le produit des trois fonctions ainsi obtenues: a) s'il y a 3 non-signances dans le facteur, on le remplace par $P$; b) s'il y a 2 non-signances, n'affectant pas l'indice lié, on prend encore $P$; c) s'il y a 2 non-signances dont une affecte l'indice lié, on prend $D_\alpha$, en désignant par $\alpha$ le rang que possède, dans le facteur, la non-signance qui n'affecte pas l'indice lié; d) s'il n'y a qu'une seule non-signance dans le facteur, on prend $D_\alpha$, $\alpha$ y étant le rang non-signant; e) si tous les indices dans le facteur considéré sont signants, on prend encore $D_\alpha$, $\alpha$ étant le rang de l'indice lié.

[7a]) Voir: Ann. Soc. scient. Bruxelles **41** (1921—1922), 1ère partie, p. 310–315.

*Les cayley-scottiennes* d'une matrice cubique, étant, par définition, s scottiennes de cette matrice et d'une de ses cayléennes (de classe 4), t la forme:

$$\left\| (i_1, i_2, i_3) \sum_{\varrho=1}^{p} (\varrho, i_1, i_4)(\varrho, i_5, i_6) \right\|_p$$

il est manifeste qu'il y en a 54 distinctes. Comme chacune possède déterminants: le persignant (d'espèce 6), 15 déterminants d'espèce 4, d'espèce 2, et le permanent (d'espèce 0), les cayley-scottiens sont au mbre de 1728, mais ils n'ont pas toutes valeurs inégales. On désignera r $(r, s)$ une cayley-scottienne dont l'indice sommant $\varrho$ occupe, dans facteurs de l'élément général, les rangs $r$ et $s$. Il y a 18 matrices ur lesquelles $r = s$ et 36 où $r \neq s$.

Il est évident que l'application de la règle de Cayley, suivie de lle de Scott, doit donner des valeurs normales et des quasi-normales, l'exclusion des anormales. L'étude des cayley-scottiens normaux (for- ation de leurs valeurs, dénombrement, répartition) est réservée à un tre travail[8]).

Les 84 valeurs quasi-normales sont: $D_\alpha \Delta_{r,s}$, $D_\alpha P_{r,s}$, $P\Delta_{r,s}$, $PP_{r,s}$, $_\alpha\sigma_{r,r}$, $P\sigma_{r,r}$, $D_\alpha \sigma^{(1)}_{r,s}$, $D_\alpha \sigma^{(2)}_{r,s}$, $P\sigma^{(1)}_{r,s}$, $P\sigma^{(2)}_{r,s}$, pour: $\alpha, r, s = 1, 2, 3$.

Chacune des valeurs $D_\alpha \Delta_{r,s}$, $P\Delta_{r,s}$ est exprimée par un cayley- ottien $(r, s)$. Pour $P\Delta_{r,s}$ il est d'espèce 4. De même pour $D_\alpha \Delta_{r,s}$ $\alpha$ n'est pas le rang qu'occupe l'indice lié dans le facteur de la somme, *ng* que nous appellerons *principal*; sinon c'est le persignant.

Exemple. Pour $p = 2$ ou pourra écrire [cf. n° 3]:

$$\left| (\overset{\varrho}{\varepsilon}_1, \overset{\varrho}{\varepsilon}_2, \overset{\varrho}{\varepsilon}_3) \sum_{\varrho=1}^{p} (\overset{\varrho}{\varepsilon}_3, \varrho, \varepsilon_4)(\varepsilon_5, \varrho, \varepsilon_6) \right|_p = \begin{cases} D_3 D_2^2 + 2 D_3 \sum_{\varrho=1}^{p} \delta^2_{2,\varrho}, \\ P D_2^2 + 2 P \sum_{\varrho=1}^{p} \delta^2_{2,\varrho}, \\ D_1 D_2^2 + 2 D_1 \sum_{\varrho=1}^{p} \delta^2_{2,\varrho}, \\ D_2^3 + 2 D_2 \sum_{\varrho=1}^{p} \delta^2_{2,\varrho}. \end{cases}$$

[8]) Bornons-nous ici à signaler que la valeur s'obtient aisément en prenant: $P$ pour un facteur, de l'élément général, à 3 non-signances ou à 2 indices non- gnants libres et à un indice signant lié; b) $D_\alpha$ pour un facteur renfermant soit indices non-signants, dont un libre, de rang $\alpha$, soit 2 indices signants et une non- gnance de rang $\alpha$ soit 3 indices signants dont un lié, de rang $\alpha$. Ces valeurs rmales sont les 16 suivantes: $D_1 D_2 D_3$, $D_i^3$, $D_i D_j^2$, $P D_i D_j$, $P D_i^2$ $(i, j = 1, 2, 3; i \neq j)$.

Les fonctions $D_\alpha P_{r,s}$ et $PP_{r,s}$ sont aussi données chacune par u cayley-scottien; les premières sont fournies par les déterminants d'espèce 2 les secondes par les permanents. Ainsi

$$\left|(\breve{\breve{\varepsilon}}_1, \hat{\varepsilon}_2, \hat{\hat{\varepsilon}}_3)\sum_{\varrho=1}^{2}(\varrho, \breve{\breve{\varepsilon}}_4, \breve{\breve{\varepsilon}}_5)(\hat{\hat{\varepsilon}}_3, \breve{\breve{\varepsilon}}_6, \varrho)\right|_2 = \begin{cases} D_1P^2 + 2D_1\sum_{\varrho=1}^{2}\pi_{1,\varrho}\pi_{3,\varrho}, \\ P^3 + 2P\sum_{\varrho=1}^{3}\pi_{1,\varrho}\pi_{3,\varrho}. \end{cases}$$

Chaque cayley-scottienne $(r, r)$, dont $\alpha$ est le rang principal, engendre

$$\begin{cases} D_\beta\sigma_{r,r},\ D_\gamma\sigma_{r,r} & \text{par l'espèce 2,} \\ D_\alpha\sigma_{r,r}\ (2\text{ fois}),\ D_\beta\sigma_{r,r},\ D_\gamma\sigma_{r,r} & \text{par l'espèce 4;} \end{cases}$$

de sorte que toute matrice $(r, r)$ donne 2 fois chacune des fonction $D_\alpha\sigma_{r,r}$. De même pour $P\sigma_{r,r}$, fonction engendrée 2 fois par des déte minants d'espèce 2 de toute matrice $(r, r)$. Exemples: pour $p = 2$ on a

$$\left|(\breve{\breve{\varepsilon}}_1, \breve{\breve{\varepsilon}}_2, \hat{\hat{\varepsilon}}_3)\sum_{\varrho=1}^{p}(\hat{\varepsilon}_4, \varrho, \breve{\breve{\varepsilon}}_2)(\breve{\breve{\varepsilon}}_5, \varrho, \breve{\breve{\varepsilon}}_6)\right|_p = PD_1D_2 + 2D_1\sum_{\varrho=1}^{p}\delta_{2,\varrho}\pi_{2,\varrho},$$

$$\left|(\hat{\hat{\varepsilon}}_1, \breve{\breve{\varepsilon}}_2, \hat{\hat{\varepsilon}}_3)\sum_{\varrho=1}^{p}(\breve{\breve{\varepsilon}}_4, \varrho, \breve{\breve{\varepsilon}}_2)(\hat{\varepsilon}_5, \varrho, \hat{\varepsilon}_6)\right|_p = PD_2^2 + 2D_2\sum_{\varrho=1}^{p}\delta_{2,\varrho}\pi_{2,\varrho},$$

$$\left|(\hat{\varepsilon}_1, \breve{\breve{\varepsilon}}_2, \breve{\breve{\varepsilon}}_3)\sum_{\varrho=1}^{p}(\varrho, \hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_4)(\varrho, \breve{\breve{\varepsilon}}_5, \breve{\breve{\varepsilon}}_6)\right|_p = D_1P^2 + 2D_1\sum_{\varrho=1}^{p}\delta_{1,\varrho}\pi_{1,\varrho}.$$

Ces résultats se généralisent dans les suivants. Chaque matrice $(r, s)$ où $\alpha$ est le rang principal, fournit: a) par 2 de ses déterminants d'espèce 2 les produits $D_\beta\sigma^{(2)}_{r,s}$, $D_\gamma\sigma^{(2)}_{r,s}$ ou bien $D_\beta\sigma^{(1)}_{r,s}$, $D_\gamma\sigma^{(1)}_{r,s}$, suivant que l'indic lié affecte le premier ou le second facteur sous le signe sommatoire b) par 4 de ses déterminants d'espèce 4, les valeurs:

$$D_\alpha\sigma^{(1)}_{r,s},\ D_\alpha\sigma^{(2)}_{r,s};\quad D_\beta\sigma^{(1)}_{r,s},\ D_\gamma\sigma^{(1)}_{r,s},$$

ou bien:

$$D_\alpha\sigma^{(1)}_{r,s},\ D_\alpha\sigma^{(2)}_{r,s};\quad D_\beta\sigma^{(2)}_{r,s},\ D_\gamma\sigma^{(2)}_{r,s},$$

suivant les mêmes cas. De toute façon, chacune des 6 fonctions $D_\omega\sigma^{(}_{r,}$ (pour $\omega = 1, 2, 3; \theta = 1, 2$) est exprimée une seule fois. Exemples:

$$\left|(\breve{\breve{\varepsilon}}_1, \breve{\breve{\varepsilon}}_2, \hat{\hat{\varepsilon}}_3)\sum_{\varrho}(\varrho, \breve{\breve{\varepsilon}}_3, \hat{\varepsilon}_4)(\breve{\breve{\varepsilon}}, \varrho, \breve{\breve{\varepsilon}}_6)\right| = PD_1D_2 + 2D_1\sum_{\varrho}\pi_{1,\varrho}\delta_{2,\varrho},$$

$$\left|(\hat{\hat{\varepsilon}}_1, \breve{\breve{\varepsilon}}_2, \hat{\hat{\varepsilon}}_3)\sum_{\varrho}(\varrho, \breve{\breve{\varepsilon}}_3, \breve{\breve{\varepsilon}}_4)(\hat{\varepsilon}_5, \varrho, \hat{\varepsilon}_6)\right| = PD_2^2 + 2D_2\sum_{\varrho}\pi_{1,\varrho}\delta_{2,\varrho}.$$

Il en est de même pour les fonctions $P\sigma^{(\theta)}_{r,s}$, puisque chaque cayley-ottienne $(r, s)$ fournit, par 2 déterminants d'espèce 2, les produits $\sigma^{(1)}_{r,s}$ et $P\sigma^{(2)}_{r,s}$. Exemple:

$$\left|(\hat{\varepsilon}_1, \breve{\varepsilon}_2, \breve{\varepsilon}_3)\sum_{\varrho}(\varrho, \hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_4)(\breve{\varepsilon}_5, \breve{\varepsilon}_6, \varrho)\right| = \begin{cases} D_1 P^2 + 2P\sum_{\varrho}\pi_{3,\varrho}\delta_{1,\varrho}, \\ D_3 P^2 + 2P\sum_{\varrho}\pi_{1,\varrho}\delta_{3,\varrho}. \end{cases}$$

On voit qu'il y a 16 déterminants quasi-normaux, dont 7 pour hacune des espèces 2 et 4, outre le persignant et le permanent. Ils ne nt pas tous inégaux. Chacune des 18 cayley-scottiennes du genre $(\alpha, \alpha)$ nne 12 valeurs quasi-normales distinctes, tandis que les 36 matrices genre $(\alpha, \beta)$ en fournissent chacune 16. Si l'on compte les valeurs stinctes par espèces, il y en a 6 pour chaque espèce 2 et 4 de toute atrice $(\alpha, \alpha)$ et 7 pour chacune de ces espèces dans toute cayley-scottienne $\alpha, \beta)$.[9])

6. Étudions maintenant les *scott-cayléens*, qui vont nous conduire une généralisation des cayléens. Considérons, à cette fin, les cayléennes, classe 6, d'une matrice cubique et d'une scottienne (de classe 5) de tte matrice. Si l'indice sommant dans le facteur-produit provenant de scottienne est un indice libre, la sommation affecte un indice écrit ulement 2 fois et l'on est donc conduit aux cayley-scottiennes (étudiées récédemment); sinon la sommation s'applique à un indice figurant 3 fois, mme dans cet exemple:

$$\left\| \sum_{\varrho=1}^{n}(\varrho, i_1, i_2)(\varrho, i_3, i_4)(\varrho, i_5, i_6)\right\|_n,$$

t l'on obtient les matrices auxquelles on réservera le nom de *scott-ayléennes*. On voit qu'elles ne diffèrent des cayléennes que par la pré-nce de 3 facteurs au lieu de 2.

Si l'on partait de 3 matrices distinctes, il y aurait 27 scott-cayléennes; ais *une* matrice cubique n'en a que 10 qui soient distinctes: trois, $\alpha, \alpha, \alpha)$, où l'indice sommant occupe le même rang $\alpha$ dans les 3 facteurs; 6 de forme $(\alpha, \alpha, \beta)$; enfin une, $(\alpha, \beta, \gamma)$, où l'indice sommant occupe les 3 rangs. hacune de ces 10 matrices possède 32 déterminants: 1, 15, 15, 1 d'espèces spectives 0, 2, 4, 6. Il y a 182 déterminants distincts.[10])

[9]) Nous étudions ailleurs la répartition — plus compliquée — des valeurs nor-ales et nous réservons aussi à un autre mémoire le cas où la matrice cubique est *érogène*, 2 ou 3 de ses déterminants étant égaux. La *monogénéité*, due notamment l'*actinomorphisme* (indices tous permutables) est particulièrement intéressante.

[10]) Il y a 320 scott-cayléens. Mais les matrices sont actinoïdes, les facteurs l'élément général étant permutables, et c'est une raison (mais non la seule) pour

Il est manifeste que l'application de la loi de Scott suivie de ce de Cayley doit donner des valeurs normales et anormales, à l'exclusi de quasi-normales. Les déterminants anormaux sont, pour chaque matri le permanent, le persignant, les 3 déterminants d'espèce 2 où les 2 signanc appartiennent à un même facteur et les 3 d'espèce 4 où la même d position a lieu pour les 2 non-signances.

Pour trouver ces valeurs anormales, on doit d'abord connaître la l suivante *de formation des valeurs normales*[11]), résultant de l'applicati des règles de Scott et de Cayley. *On fait correspondre dans l'éléme général*: a) *à* $P$, *un facteur à 2 non-signances*; b) *à* $D_\alpha$, *un facteur, s sans non-signance,* $\alpha$ *étant le rang sommant, soit à une seule no signance, de rang* $\alpha$; *on fait alors le produit des 3 fonctions.* On vo ainsi que $P$ intervient toujours si l'espèce est 2, jamais si l'espèce est

7. *On exprime un scott-cayléen anormal en ajoutant un compléme à la valeur principale, que donnerait la règle pour les valeurs normale Il a une expression très compliquée pour p quelconque, mais pour* $p =$ *ce complément vaut 4 fois la somme en* $\varrho$ *des produits des tro facteurs obtenus comme pour les cayléens.*

Voici quelques exemples. Pour $p = 2$ on peut écrire simplement:

$$\left|\sum_{\varrho=1}^{p}(\breve{\varepsilon}_1,\varrho,\breve{\varepsilon}_2)(\breve{\varepsilon}_3,\varrho,\breve{\varepsilon}_4)(\breve{\varepsilon}_5,\varrho,\breve{\varepsilon}_6)\right|_p = \begin{cases} P^3+4\sum_{\varrho=1}^{p}\pi_{2,\varrho}^3, \\ D_2^3+4\sum_{\varrho=1}^{p}\delta_{2,\varrho}^3, \end{cases}$$

$$\left|\sum_{\varrho=1}^{p}(\breve{\varepsilon}_1,\varrho,\breve{\varepsilon}_2)(\varrho,\breve{\varepsilon}_3,\breve{\varepsilon}_4)(\varrho,\breve{\varepsilon}_5,\breve{\varepsilon}_6)\right|_p = P^3+4\sum_{\varrho=1}^{p}\pi_{1,\varrho}^2\,\pi_{2,\varrho},$$

$$\left|\sum_{\varrho=1}^{p}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varrho)(\breve{\varepsilon}_3,\breve{\varepsilon}_4,\varrho)(\varepsilon_5,\varepsilon_6,\varrho)\right|_p = PD_3^2+4\sum_{\varrho=1}^{p}\pi_{3,\varrho}\,\delta_{3,\varrho}^2;$$

$$\left|\sum_{\varrho=1}^{p}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varrho)(\varrho,\varepsilon_3,\varepsilon_4)(\varepsilon_5,\varrho,\varepsilon_6)\right|_p = D_1D_2D_3+4\sum_{\varrho=1}^{p}\delta_{1,\varrho}\,\delta_{2,\varrho}\,\delta_{3,\varrho},$$

qu'elles soient mérogènes. Convenons de dire que les déterminants ne sont p distincts lorsque c'est pour cette raison qu'ils ont même valeur. Pour chacune d 3 matrices $(\alpha,\alpha,\alpha)$ il y a 10 déterminants distincts, respectivement 1, 4, 4, d'espèces 0, 2, 4, 6; pour chacune des 6 matrices $(\alpha,\alpha,\beta)$ il y en a 20, respectiv ment 1, 9, 9, 1 des mêmes espèces; enfin, pour l'unique scott-cayléenne $(\alpha,\beta,\gamma$ les 32 déterminants sont distincts. Au total, il y en a donc 182.

[11]) Nous étudions ailleurs la répartition des valeurs normales, la matrice prim tive étant soit hologène, soit mérogène.

$$\left| \sum_{\nu=1}^{p} (\varrho, \breve{\breve{\varepsilon}}_1, \breve{\breve{\varepsilon}}_2)\,(\breve{\varepsilon}_3, \varrho, \breve{\varepsilon}_4)\,(\varepsilon_5, \varepsilon_6, \varrho) \right|_{\mathfrak{p}} = \begin{cases} D_3 P^2 + 4 \sum_{\varrho=1}^{\mathfrak{p}} \pi_{1,\varrho}\, \pi_{2,\varrho}\, \delta_{3,\varrho} \\ P D_1 D_3 + 4 \sum_{\varrho=1}^{p} \pi_{2,\varrho}\, \delta_{1,\varrho}\, \delta_{3,\varrho}. \end{cases}$$

Dans le cas de scott-cayléennes du genre $(\alpha, \alpha, \alpha)$, les trois déterminants ormaux d'espèce 2 sont égaux entre eux, de même que ceux d'espèce 4. vec ces matrices, on obtient une somme de cubes pour l'expression du rmanent et pour celle du persignant, comme c'est le cas pour le prer exemple ci-dessus. Pour les matrices du genre $(\alpha, \alpha, \beta)$, les 3 déterminants anormaux d'espèce 2 ne donnent que 2 valeurs; de même pour ceux spèce 4. Les 32 déterminants de la matrice $(\alpha, \beta, \gamma)$ fournissant valeurs anormales, on voit que parmi les 182 déterminants stincts, on trouve $3 \cdot 4 + 6 \cdot 6 + 1 \cdot 8$, c'est-à-dire 56 valeurs anormales stinctes.

8. Voici diverses *extensions* de ces résultats. Si $m$ est impair et si $= 2$, le déterminant d'espèce $s\,(m-1)$:

$$\left| \sum_{\varrho=1}^{p} \prod_{\sigma=1}^{s} (\varrho, \varepsilon_{\sigma,1}, \ldots, \varepsilon_{\sigma,m-1}) \prod_{\tau=s+1}^{n} (\varrho, \breve{\varepsilon}_{\tau,1}, \ldots, \breve{\varepsilon}_{\tau,m-1}) \right|_{p}$$

$$= D_1^s P^{n-s} + 2^{n-1} \sum_{\varrho=1}^{p} \delta_{1,\varrho}^{s}\, \pi_{1,\varrho}^{n-s},$$

$_{,\varrho}$ et $\pi_{1,\varrho}$ représentant le persignant

$$|(\varrho, \varkappa_1, \ldots, \varkappa_{m-1})|_{(\varkappa=1,\,2)}$$

le permanent de classe $m-1$ de la tranche $\varrho$ de rang 1 de la matrice ont $P$ et $D_1$ désignent le permanent et le déterminant de rang nongnant 1. Si $n - s = s$, la fonction peut se mettre sous forme d'une mme de puissances d'exposant $n$. Si $p > 2$ le complément a une rme très compliquée.

Dans le cas spécial où $s$ est nul, $m$ peut être paire et l'on a alors permanent:

$$\left| \sum_{\varrho=1}^{2} \prod_{\nu=1}^{n} (\varrho, \breve{\varepsilon}_{\nu,1}, \ldots, \breve{\varepsilon}_{\nu,m-1}) \right|_{2}^{+} = P^n + 2^{n-1} \sum_{\varrho=1}^{2} \pi_{1,\varrho}^{n},$$

ndis que si $s = n$ on obtient le persignant; tous deux sont mis directeent sous forme d'une somme de puissances d'exposant $n$.

Si l'indice sommant occupe des rangs quelconques, on a des relatio analogues, dont nous n'écrirons que celle relative au cas spécial c persignant:

$$\left|\sum_{\varrho=1}^{2}\prod_{\nu=1}^{n}(\varepsilon_{\nu,1},\ \ldots,\ \varepsilon_{\nu,\mu_\nu-1},\ \varrho,\ \varepsilon_{\nu,\mu_\nu},\ \ldots,\ \varepsilon_{\nu,m-1})\right|_2$$

$$=\prod_{\nu=1}^{n}D_{\mu_\nu}+2^{n-1}\sum_{\varrho=1}^{2}\prod_{\nu=1}^{n}\delta_{\mu_\nu,\varrho}.$$

Si $m=n$ et si l'indice sommant occupe tous les rangs, on a:

$$\left|\sum_{\varrho=1}^{2}\prod_{\sigma=1}^{s}(\varepsilon_{\sigma,1},\ \ldots,\ \varepsilon_{\sigma,\sigma-1},\ \varrho,\ \varepsilon_{\sigma,\sigma},\ \ldots,\ \varepsilon_{\sigma,n-1})\prod_{\tau=s+1}^{n}(\breve{\varepsilon}_{\tau,1},\ \ldots,\ \breve{\varepsilon}_{\tau,\tau-1},\ \varrho,\ \breve{\varepsilon}_{\tau,\tau},\ \ldots,\ \breve{\varepsilon}_{\tau,}\right.$$

$$=P^{n-s}\prod_{\sigma=1}^{s}D_\sigma+2^{n-1}\sum_{\varrho=1}^{2}\prod_{\sigma=1}^{s}\delta_{\sigma,\varrho}\prod_{\tau=s+1}^{n}\pi_{\tau,\varrho}.$$

**9.** On peut *encore généraliser* à deux degrés. Le premier est réali en supposant qu'on parte non plus d'une seule matrice de classe $m$, ma d'un nombre $n$ de telles matrices (dont quelques-unes pourront êt identiques). Pour la seconde extension, on prend ces matrices tout à fa quelconques (mais de même ordre); il faut toutefois encore que les class soient toutes impaires, sauf dans le cas du permanent. On est conduit la relation:

$$\left|\sum_{\varrho=1}^{2}\prod_{\sigma=1}^{s}b_\sigma(\varepsilon_{\sigma,1},\ \ldots,\ \varepsilon_{\sigma,\mu_\sigma-1},\ \varrho,\ \varepsilon_{\sigma,\mu_\sigma},\ \ldots,\ \varepsilon_{\sigma,m_\sigma-1})\right.$$
$$\left.\cdot\prod_{\tau=s+1}^{n}b_\tau(\breve{\varepsilon}_{\tau,1},\ \ldots,\ \breve{\varepsilon}_{\tau,\mu_\tau-1},\ \varrho,\ \breve{\varepsilon}_{\tau,\mu_\tau},\ \ldots,\ \breve{\varepsilon}_{\tau,m_\tau-1})\right|_2$$

$$=\prod_{\sigma=1}^{s}D^{(\sigma)}_{\mu_\sigma}\prod_{\tau=s+1}^{n}P^{(\tau)}+2^{n-1}\sum_{\varrho=1}^{p}\prod_{\sigma=1}^{s}\delta^{(\sigma)}_{\mu_\sigma,\varrho}\prod_{\tau=s+1}^{n}\pi^{(\tau)}_{\mu_\tau,\varrho},$$

où $D^{(\sigma)}_\varkappa$ désigne le déterminant

$$|b_\sigma(\varepsilon_1,\ \ldots,\ \varepsilon_{\varkappa-1},\ \breve{\varepsilon}_\varkappa,\ \varepsilon_{\varkappa+1},\ \ldots,\ \varepsilon_{m_\sigma})|_{(\varepsilon=1,\,2)},$$

$P^{(\sigma)}$ étant le permanent qui lui correspond, et où

$$\pi^{(\tau)}_{\mu_\tau,\varrho}\equiv\overset{+}{|}\,b_\tau(\varkappa_1,\ \ldots,\ \varkappa_{\mu_\tau-1},\ \varrho,\ \varkappa_{\mu_\tau},\ \ldots,\ \varkappa_{m_\tau-1})\Big|_{(\varkappa=1,\,2)},$$

permanent, de classe $m_\tau-1$, de la tranche $\varrho$ de rang $\mu_\tau$ de la matric $\tau^{\text{ième}}$, de classe $m_\tau$; et de même pour les déterminants $\delta$. Pour supprime la seconde extension, il suffit de remplacer $m_\sigma$ et $m_\tau$ par $m$.

On voit que, dans le cas le plus général, on obtient encore le complément, relatif à une valeur anormale, par la même règle que pour les cayléennes.

**10.** Étudions les *bicayléennes*, qui sont remarquables. Une cayléenne d'une matrice $M$ et d'une de ses cayléennes est une matrice d'éléments à 2 paires d'indices sommants, appelée *bicayléenne* de $M$. Elle est de classe 5 si $M$ est cubique et elle a alors une forme telle que la suivante:

$$\left\| \sum_{\varrho=1}^{p} \sum_{\sigma=1}^{p} (\varrho, \sigma, \omega_1)(\varrho, \omega_2, \omega_3)(\sigma, \omega_4, \omega_5) \right\|_p ,$$

qui est identique à

$$\left\| \sum_{\sigma=1}^{p} (\sigma, \omega_4, \omega_5) \sum_{\varrho=1}^{p} (\varrho, \sigma, \omega_1)(\varrho, \omega_2, \omega_3) \right\|_p ;$$

on peut former $9 \cdot 12 \cdot 3 = 324$ de ces matrices, mais il n'y en a que 27 distinctes, à cause de l'équivalence des deux paires d'indices sommants et de la permutabilité des 3 facteurs. Le *facteur*, dit *principal*, où figurent 2 indices sommants, peut être placé le premier; les autres facteurs, où les indices sommants sont *isolés*, s'appellent *facteurs secondaires*. Si une paire d'indices sommants occupe les rangs $r_1, r_2$ et l'autre paire les rangs $r_1'$ et $r_2'$ (ce qui exige que $r_1 \neq r_1'$), on désignera la bicayléenne par la notation $(r_1, r_2; r_1', r_2')$, où les rangs placés après les virgules sont ceux des indices sommants isolés.

**11.** *De la règle de Cayley découle la loi suivante pour former la valeur des bicayléens normaux et quasi-normaux*:

a) *pour l'espèce* 2, *quand chaque facteur de l'élément entre barres contient une seule non-signance, la valeur — normale — du bicayléen s'obtient en prenant* $D_\alpha$ *pour un facteur où* $\alpha$ *est le rang non-signant et en faisant le produit des* 3 *fonctions ainsi obtenues. Si, des deux facteurs secondaires, l'un contient* 2 *non-signances, l'autre,* $f$, *la non-signance restante, et si les rangs de celui des deux indices sommants qui est absent dans* $f$, *sont* $i$ *et* $j$, $i$ *dans le facteur principal, alors la valeur — quasi-normale — est* $D_\varkappa \sigma_{i,j}^{(2)}$, *en désignant par* $\varkappa$ *le rang de la non-signance dans* $f$. *On pose* $\sigma_{\alpha,\alpha}^{(2)} \equiv \sigma_{\alpha,\alpha}$ *et l'on a* $\sigma_{i,j}^{(1)} = \sigma_{j,i}^{(2)}$, *de sorte qu'on peut, par exemple en vue de mettre les indices inférieurs de* $\sigma$ *par ordre de grandeur croissante, modifier l'ordre de ces indices si l'on change l'indice supérieur*;

b) *pour l'espèce* 4, *si l'unique non-signance se trouve dans un facteur secondaire,* $f$, *la valeur — quasi-normale — est* $D_\varkappa \Delta_{ij}$.

Exemples:

$$\left|\sum_{\varrho=1}^{p}\sum_{\sigma=1}^{p}(\breve{\omega}_1,\varrho,\breve{\omega}_2)(\varrho,\omega_3,\sigma)(\breve{\breve{\omega}}_4,\breve{\breve{\omega}}_5,\sigma)\right|_p=\begin{cases}D_2\,\sigma^{(2)}_{1,2}\\ D_1\,\sigma^{(2)}_{1,2}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}PD_1D_2+2D_2\sum_{\lambda=1}^{p}\pi_{2,\lambda}\,\delta_{1,\lambda},\\ PD_1^2+2D_1\sum_{\lambda=1}^{p}\pi_{2,\lambda}\,\delta_{1,\lambda}.\end{cases}$$

$$\left|\sum_{\varrho=1}^{p}\sum_{\sigma=1}^{p}(\omega_1,\varrho,\breve{\omega}_2)(\varrho,\sigma,\omega_3)(\breve{\omega}_4,\sigma,\breve{\omega}_5)\right|_p=D_3\,\sigma_{2,2}$$

$$=PD_2D_3+2D_3\sum_{\lambda=1}^{p}\delta_{2,\lambda}\,\pi_{2,\lambda}.$$

$$\left|\sum_{\varrho=1}^{p}\sum_{\sigma=1}^{p}(\varrho,\omega_1,\omega_2)(\omega_3,\varrho,\sigma)(\breve{\breve{\omega}}_4,\sigma,\breve{\breve{\omega}}_5)\right|_p=\begin{cases}D_1\,\Delta_{1,2}\\ D_3\,\Delta_{1,2}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}D_2D_1^2+2D_1\sum_{\lambda=1}^{p}\delta_{1,\lambda}\,\delta_{2,\lambda},\\ D_1D_2D_3+2D_3\sum_{\lambda=1}^{p}\delta_{1,\lambda}\,\delta_{2,\lambda},\end{cases}$$

les expressions des compléments étant données pour $p=2$.

Il y a: 4 valeurs normales, d'espèce 2; 8 quasi-normales, dont 4 d'espèce 4 et 4 d'espèce 2; enfin 4 valeurs anormales. Pour les 8 bicayléens quasi-normaux, le facteur principal n'a pas de non-signance, contrairement à ce qui a lieu pour les 8 autres bicayléens. C'est ce qui apparaîtra lumineusement dans l'exemple donné au n° 15.

**12.** Un mot du dénombrement et de la répartition des valeurs quasi-normales[12]). De la règle de formation des bicayléens quasi-normaux valant $D_k\sigma_{i,i}$ et $D_k\sigma^{(\theta)}_{i,j}$, il résulte que la bicayléenne $(r_1,r_2;\ r_1',r_2')$ engendre, par 4 de ses déterminants d'espèce 2, chacune des valeurs:

$$D_{l_1}\sigma^{(2)}_{r_1,r_2},\quad D_{l_2}\sigma^{(2)}_{r_1,r_2};\qquad D_{\lambda_1}\sigma^{(2)}_{r_1',r_2'},\quad D_{\lambda_2}\sigma^{(2)}_{r_1',r_2'},$$

les nombres $l_1$ et $l_2$ d'une part, $\lambda_1$ et $\lambda_2$ d'autre part, désignant, des 3 nombres 1, 2, 3, les deux qui diffèrent respectivement de $r_2'$ et de $r_2$. On pose toujours:

$$\sigma^{(1)}_{\alpha,\alpha}=\sigma^{(2)}_{\alpha,\alpha}\cdot\sigma_{\alpha,\alpha},\quad \sigma^{(2)}_{i,j}\cdot\sigma^{(1)}_{j,i}.$$

Remarquons que les deux fonctions $\sigma^{(2)}_{r_1,r_2}$, $\sigma^{(2)}_{r_1',r_2'}$ sont en général inégales et que, des 27 matrices, il y en a respectivement 12 et 3 pour

[12]) Nous traitons ailleurs, en détail, la question concernant les valeurs normales.

esquelles, des égalités $r_1 = r_2$, $r_1' = r_2'$ une seule ou bien les deux ont lieu et où par conséquent une fonction $\sigma$ ou bien les deux sont des cayléennes canoniques.

Au total, l'ensemble des 27 bicayléennes engendre 4 fois chacune des 27 fonctions $D_k \sigma_{i,j}^{(2)}$, pour $k, i, j = 1, 2, 3$.

De la règle de formation des valeurs des bicayléens ayant pour expression $D_k \Delta_{i,j}$, il résulte qu'une bicayléenne engendre, par 4 de ses déterminants d'espèce 4, une fois chacune des fonctions:

$$D_{l_1} \Delta_{r_1, r_2}, \quad D_{l_2} \Delta_{r_1, r_2}; \quad D_{\lambda_1} \Delta_{r_1', r_2'}, \quad D_{\lambda_2} \Delta_{r_1', r_2'}$$

et l'on en déduit que l'ensemble des 27 matrices engendre 4 $(2 - \delta_{i,j})$ fois la valeur $D_k \Delta_{i,j}$, puisque $\Delta_{i,j} = \Delta_{j,i}$.

**13.** Arrivons aux bicayléens anormaux. Pour chaque bicayléenne, il y en a 4, dont l'un est d'espèce 0 (le permanent); deux, tels que

$$\left| \sum_{\varrho=1}^{p} \sum_{\sigma=1}^{p} (\varrho, \sigma, \breve{\varepsilon}_1)(\varrho, \hat{\varepsilon}_2, \hat{\varepsilon}_3)(\sigma, \varepsilon_4, \varepsilon_5) \right|_p,$$

sont d'espèce 2; enfin l'un est d'espèce 4, celui où la non-signance figure dans le facteur principal.

*L'expression de ces bicayléens est donnée par un produit de* 3 *fonctions correspondant chacune à un des trois facteurs, le principal donnant*[13]) *toujours P et les autres P ou $D_s$ suivant qu'ils contiennent ou non des non-signances, s designant, dans le facteur (secondaire), le rang sommant. Mais à ce produit, qui constitue la valeur principale, on doit ajouter un complément, dont l'expression, compliquée pour $p > 2$, devient simple et élégante quand l'ordre est* 2.

Les nombres $i, j, k$, étant 1, 2, 3 dans un ordre quelconque, désignons par le symbole $\pi_{i.\varrho;\, j,\sigma}$ le permanent, à 1 dimension[14]), de la file, de rang $k$, des éléments dont les indices des rangs $i$ et $j$ valent respectivement $\varrho$ et $\sigma$, de sorte que, par exemple:

$$\pi_{1,\varrho;\, 3,\sigma} \equiv \prod_{\omega=1}^{2} (\varrho, \omega, \sigma).$$

Cela étant, *l'expression du complément des bicayléens anormaux* $(r_1, r_2;\ s_1, s_2)$ *est une somme de deux groupes de termes:*

a) *le premier groupe, qui rappelle le complément des cayléens anormaux, se compose additivement de deux sommes, de même nature, corres-*

[13]) Il est intéressant de remarquer que pour les valeurs normales le facteur principal donne toujours $P$, tandis que pour les bicayléens anormaux, il donne $D_\alpha$, $\alpha$ est, dans ce facteur, le rang non-signant.

[14]) On sait qu'un permanent à une seule dimension (ou de classe 1) est un simple produit.

*pondant chacune à une paire d'indices sommants, $\varrho$ ou $\sigma$, celle en $\varrho$, pa exemple, valant 2 fois le produit de 2 expressions, dont l'une est donnée comme pour la valeur principale, mais par celui des facteurs (secondaires qui ne contient pas l'indice sommant considéré $\varrho$, l'autre expression étan la somme, en $\varrho$, des produits de deux fonctions correspondant aux deu autres facteurs, celle relative au facteur principal étant $\pi_{r_1,\varrho}$ et l'autre — relative au facteur secondaire en $\varrho$ — étant $\pi_{r_2,\varrho}$ ou $\delta_{r_2,\varrho}$ suivant qu ce facteur contient ou non des non-signances (au nombre de 2);*

b) *le second groupe, image remarquable de l'élément général d déterminant, vaut 4 fois la somme double en $\varrho\,\sigma$ du produit de 3 fonc tions correspondant aux 3 facteurs de l'élément entre barres: le facteu principal donne $\pi_{r_1,\varrho;\,s_1,\sigma}$ et, quant aux facteurs secondaires, l'on pren d'une part le permanent $\pi_{r_2,\varrho}$ ou le déterminant $\delta_{r_2,\varrho}$ et d'autre part $\pi_{s_2,}$ ou $\delta_{s_2,\sigma}$ respectivement pour le facteur en $\varrho$ et pour celui en $\sigma$, en choisissant $\pi$ ou $\delta$ suivant que le facteur envisage contient ou non des signances.*

**14.** Illustrons cette règle de quelques exemples. Pour $p=2$ on a

$$\left|\sum_{\varrho=1}^{p}\sum_{\sigma=1}^{p}(\breve{\omega}_1,\varrho,\sigma)\,(\varrho,\breve{\omega}_2,\breve{\omega}_3)\,(\sigma,\omega_4,\breve{\omega}_5)\right|_p = P^3 + 2P\sum_{\varrho=1}^{p}\pi_{2,\varrho}\,\pi_{1,\varrho} + 2P\sum_{\sigma=1}^{p}\pi_{3,\sigma}\,\pi_{1,\sigma} + 4\sum_{\varrho=1}^{p}\sum_{\sigma=1}^{p}\pi_{2,\varrho;\,3,\sigma}\,\pi_{1,\varrho}\,\pi_{1,\sigma},$$

$$\left|\sum_{\varrho=1}^{p}\sum_{\sigma=1}^{p}(\varrho,\breve{\omega}_1,\sigma)\,(\hat{\omega}_2,\varrho,\hat{\omega}_3)\,(\sigma,\breve{\omega}_4,\breve{\omega}_5)\right|_p = D_2P^2 + 2\sum_{\varrho=1}^{p}\pi_{1,\varrho}\,\delta_{2,\varrho} + 2D_2\sum_{\sigma=1}^{p}\pi_{3,\varrho}\,\pi_{1,\sigma} + 4\sum_{\varrho=1}^{p}\sum_{\sigma=1}^{p}\pi_{1,\varrho;\,3,\sigma}\,\delta_{2,\varrho}\,\pi_{1,\sigma},$$

$$\left|\sum_{\varrho=1}^{p}\sum_{\sigma=1}^{p}(\breve{\omega}_1,\varrho,\sigma)(\hat{\omega}_2,\varrho,\hat{\omega}_3)(\omega_4,\hat{\omega}_5,\sigma)\right|_p = PD_2D_3 + 2D_3\sum_{\varrho=1}^{p}\pi_{2,\varrho}\,\delta_{3,\varrho} + 2D_2\sum_{\sigma=1}^{p}\pi_{3,\sigma}\,\delta_{3,\sigma} + 4\sum_{\varrho=1}^{p}\sum_{\sigma=1}^{p}\pi_{2,\varrho;\,3,\sigma}\,\delta_{2,\varrho}\,\delta_{3,\sigma}.$$

$$\begin{matrix}\text{I)}\\ \text{II)}\end{matrix}\quad\left|\sum_{\varrho=1}^{p}\sum_{\sigma=1}^{p}(\varrho,\sigma,\breve{\breve{\omega}}_1)\,(\hat{\hat{\omega}}_2,\varrho,\hat{\hat{\omega}}_3)\,(\sigma,\hat{\hat{\omega}}_4,\hat{\hat{\omega}}_5)\right|_p$$

$$= \begin{cases} \text{I)} & PD_1D_2 + 2D_1\sum_{\varrho=1}^{p}\pi_{1,\varrho}\,\delta_{2,\varrho} + 2D_2\sum_{\sigma=1}^{p}\pi_{2,\sigma}\,\delta_{1,\sigma} + 4\sum_{\varrho=1}^{p}\sum_{\sigma=1}^{p}\pi_{1,\varrho;\,2,\sigma}\,\delta_{2,\varrho}\,\delta_{1,\sigma}, \\ \text{II)} & P^{\text{II}} + 4P\sum_{\lambda=1}^{p}\pi_{1,\lambda}\,\pi_{2,\lambda} + 4\sum_{\varrho=1}^{p}\sum_{\sigma=1}^{p}\pi_{1,\varrho;\,2,\sigma}\,\pi_{2,\varrho}\,\pi_{1,\sigma}. \end{cases}$$

Pour le permanent des 3 matrices du genre $(\alpha, \beta; \beta, \alpha)$, les deux sommes composant le second groupe de termes sont identiques; c'est le cas du dernier exemple (II).

**15.** Donnons enfin les valeurs de tous les déterminants de la bicayléenne d'ordre $p = 2$:

$$\left\| \sum_{\varrho=1}^{p} \sum_{\sigma=1}^{p} (\varrho, \sigma, \omega_1)(\varrho, \omega_2, \omega_3)(\sigma, \omega_4, \omega_5) \right\|_p ;$$

en vue d'abréger l'écriture, nous nous bornerons à indiquer, dans leur ordre, les signances, en les mettant entre parenthèses, des points remplaçant, pour plus de clarté, les signes $\cap$:

*Espèce* 0:

$$(\cup\cup\cup\cup\cup) = P^3 + 2P\sum_{\varrho=1}^{p} \pi_{1,\varrho}^2 + 2P\sum_{\sigma=1}^{p} \pi_{2,\sigma}\pi_{1,\sigma} + 4\sum_{\varrho=1}^{p}\sum_{\sigma=1}^{p} \pi_{1,\varrho;2,\sigma}\pi_{1,\varrho}\pi_{1,\sigma}.$$

*Espèce* 2:

$$(\,.\;.\cup\cup\cup) = PD_2D_3 + 2D_3\sum_{\lambda=1}^{p} \pi_{1,\lambda}\delta_{2,\lambda},$$

$$(\,.\cup\,.\cup\cup) = PD_2^2 + 2D_2\sum_{\lambda=1}^{p} \pi_{1,\lambda}\delta_{2,\lambda},$$

$$(\,.\cup\cup\;.\cup) = PD_1D_3 + 2D_3\sum_{\lambda=1}^{p} \delta_{1,\lambda}\pi_{1,\lambda},$$

$$(\,.\cup\cup\cup\;.\,) = PD_1D_2 + 2D_2\sum_{\lambda=1}^{p} \delta_{1,\lambda}\pi_{1,\lambda},$$

$$(\cup\;.\;.\cup\cup) = D_1P^2 + 2P\sum_{\varrho=1}^{p} \delta_{1,\varrho}\pi_{1,\varrho} + 2D_1\sum_{\sigma=1}^{p} \pi_{1,\sigma}\pi_{2,\sigma} + 4\sum_{\varrho=1}^{p}\sum_{\sigma=1}^{p} \pi_{1,\varrho;2,\sigma}\delta_{1,\varrho}\pi_{1,\sigma},$$

$$(\cup\,.\cup\,.\cup) = D_3^3, \quad (\cup\cup\,.\cup\,.) = D_3D_2^2,$$

$$(\cup\,.\cup\cup\,.\,) = (\cup\cup\,.\,.\cup) = D_2D_3^2,$$

$$(\cup\cup\cup\;.\;.) = D_1P^2 + 2D_1\sum_{\varrho=1}^{p} \pi_{1,\varrho}^2 + 2P\sum_{\sigma=1}^{p} \pi_{2,\sigma}\delta_{1,\sigma} + 4\sum_{\varrho=1}^{p}\sum_{\sigma=1}^{p} \pi_{1,\varrho;2,\sigma}\pi_{1,\varrho}\delta_{1,\sigma}.$$

*Espèce* 4:

$$(\cup\ .\ .\ .\ .) = PD_1^2 + 2D_1\sum_{\varrho=1}^{p}\pi_{1,\varrho}\delta_{1,\varrho} + 2D_1\sum_{\sigma=1}^{p}\pi_{2,\sigma}\delta_{1,\sigma} + 4\sum_{\varrho=1}^{p}\sum_{\sigma=1}^{p}\pi_{1,\varrho;\,2,\sigma}\delta_{1,\varrho}\delta_{1,\sigma},$$

$$(\ .\cup\ .\ .\ .) = D_1D_2^2 + 2D_2\sum_{\lambda=1}^{p}\delta_{1,\lambda}\delta_{2,\lambda},$$

$$(\ .\ .\cup\ .\ .) = D_1D_2D_3 + 2D_3\sum_{\lambda=1}^{p}\delta_{1,\lambda}\delta_{2,\lambda},$$

$$(\ .\ .\ .\cup\ .) = D_2D_1^2 + 2D_2\sum_{\lambda=1}^{p}\delta_{1,\lambda}^2,$$

$$(\ .\ .\ .\ .\cup) = D_3D_1^2 + 2D_3\sum_{\lambda=1}^{p}\delta_{1,\lambda}^2.$$

Les 108 fonctions représentées par les bicayléens anormaux sont, en général, toutes différentes. Les cas de dégénérescence, notamment par mérogénéité, seront étudiés ailleurs.

On peut généraliser les résultats précédents, comme pour les cayléens [cf. n$^{os}$ 8—9]; mais ici les formules se compliquent singulièrement et nous ne les écrirons pas, faute de place.

Louvain, le 15 mars 1922.

(Eingegangen am 20. März 1922.)

# Differentialgeometrie der geradlinigen Flächen im elliptischen Raum.

Von

Wilhelm Blaschke in Hamburg.

Die Differentialgeometrie der geradlinigen Flächen läßt sich besonders symmetrisch für den elliptischen nicht-Euklidischen Raum begründen mittels eines Übertragungsprinzips, das Study, Hjelmslev und Fubini 1900 angegeben haben[1]). Es zeigt sich, daß man diese Flächen am besten durch vier Integralinvarianten kennzeichnet und daß immer ein gewisses Quadrupel derartiger Flächen miteinander invariant verknüpft ist. Wir beschränken uns hier durchweg auf reelle geometrische Gebilde im elliptischen Raume und wiederholen in § 1 und § 2, was wir im folgenden an Hilfsmitteln aus der nicht-Euklidischen Geometrie benötigen.

## § 1.

## Abbildung der Geraden des elliptischen Raumes auf die Punkte zweier Euklidischer Kugeln.

Es seien $x_0$, $x_1$, $x_2$, $x_3$ homogene Koordinaten eines Punktes $x$ im projektiven Raume. Wir können sie für reelle Punkte immer und zwar auf zwei Arten so normieren, daß

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = xx = 1 \tag{1}$$

[1]) Die Literatur findet man angegeben bei E. Study: Beiträge zur nicht-Euklidischen Geometrie I, II, III; American Journal of Math. 29 (1906), S. 101–167, bes. S. 117, bei J. Petersen (= Hjelmslev): Géométrie des droites dans l'espace non euclidien, Kopenhagen Akademie 1900, S. 305–330, in der Dissertation von G. Fubini: Il parallelismo di Clifford negli spazii ellittici, Annali della R. scuola normale di Pisa 9 (1900), endlich in dem ausgezeichneten Lehrbuch „Non-Euclidean Geometry" von J. L. Coolidge, Oxford 1909. Während des Druckes der vorliegenden Arbeit ist erschienen: M. J. Conran, Curvature and torsion in elliptic space, Proc. London, Math. Soc. (2) 21 (1922), S. 191–213.

wird. Dann sind die Punkte $x_0, x_1, x_2, x_3$ und $-x_0, -x_1, -x_2, -x_3$ identisch. Die „*Entfernung*“ $\varphi$ zweier Punkte $x, y$ können wir in den normierten Koordinaten durch die Formel erklären:

$$\cos\varphi = x_0 y_0 + x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = xy. \tag{2}$$

Dann lassen die eigentlich orthogonalen Substitutionen der $x_i, y_i$ die Formen $xx$, $yy$ und die Polarenbildung $xy$ invariant; wir können sie also als „*Bewegungen*“ des „elliptischen Raumes“ mit der Maßbestimmung (2) ansprechen.

Die zweireihigen Determinanten $g_{ik}$ aus der Matrix zweier Punkte $x, y$

$$[x, y] = \left\| \begin{matrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{matrix} \right\|, \tag{3}$$

nämlich

$$\left\{ \begin{matrix} g_{01}, & g_{02}, & g_{03}, \\ g_{23}, & g_{31}, & g_{12} \end{matrix} \right. \tag{4}$$

nennt man die Linienkoordinaten Plückers für die Verbindungsgerade von $x$ und $y$.

Gleichzeitige orthogonale Substitutionen der $x$, $y$ „induzieren“ in den $g$ lineare Substitutionen, die die quadratischen Formen

$$\left\{ \begin{matrix} A = 2\, g_{01}\, g_{23} + \dots, \\ B = \quad g_{01}^2 + g_{23}^2 + \dots \end{matrix} \right. \tag{5}$$

unverändert lassen. Dabei sollen die Punkte zyklische Vertauschung der Marken 1, 2, 3 andeuten. Die Invarianz von $A$ oder etwas allgemeiner: der Polarenbildung von $A$ folgt aus der Invarianz der Determinante von vier Punkten bei einer linearen Substitution mit der Determinante Eins, denn es ist

$$(x\, y\, \bar{x}\, \bar{y}) = g_{01}\, \bar{g}_{23} + g_{23}\, \bar{g}_{01} + \dots . \tag{6}$$

Die Invarianz von $B$ aus der bekannten Tatsache, daß man das Produkt zweier Matrizen auf zwei verschiedene Arten entwickeln kann:

$$[x, y] \cdot [\bar{x}, \bar{y}] = g_{01}\, \bar{g}_{01} + g_{23}\, \bar{g}_{23} + \dots = \left| \begin{matrix} x\bar{x} & x\bar{y} \\ y\bar{x} & y\bar{y} \end{matrix} \right|, \tag{7}$$

worin rechts vier Bewegungsinvarianten stehen. Da bei den Bewegungen unseres elliptischen Raumes $A$ und $B$ in sich übergeführt werden, gilt dasselbe auch von

$$\left\{ \begin{matrix} B + A = (g_{01} + g_{23})^2 + \dots, \\ B - A = (g_{01} - g_{23})^2 + \dots . \end{matrix} \right. \tag{8}$$

Wir führen an Stelle der $g$ neue Linienkoordinaten ein durch die Formeln

$$(9) \qquad \begin{cases} g_{01} + g_{23} = l_1, \dots & 2g_{01} = l_1 + r_1, \dots \\ g_{01} - g_{23} = r_1, \dots & 2g_{23} = l_1 - r_1, \dots . \end{cases}$$

Nach (8) ergeben die Bewegungen lineare Substitutionen der $l_1, l_2, l_3$; $r_1, r_2, r_3$, die die quadratischen Formen

$$(10) \qquad \begin{cases} \mathfrak{l} \cdot \mathfrak{l} = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2, \\ \mathfrak{r} \cdot \mathfrak{r} = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 \end{cases}$$

erhalten. Möge eine solche Substitution etwa die Gestalt haben

$$l_i' = \sum (c_{ik} l_k + c_{ik}' r_k),$$

so muß

$$\sum l_i'^2 = \sum_i \{ \sum_k (c_{ik} l_k + c_{ik}' r_k) \}^2 = \sum l_k^2$$

sein und daraus folgt $c_{ik}' = 0$. Die $l$ müssen somit nur unter sich transformiert werden und ebenso die $r$. Wir finden also, daß der stetigen Gruppe von Bewegungen des elliptischen Raumes die eigentlich orthogonalen Substitutionen der $l$ und (unabhängig davon) der $r$ entsprechen. Da die stetige Bewegungsgruppe des elliptischen Raumes von sechs wesentlichen Parametern abhängt, muß sie sich auf die stetige, ebenfalls sechsgliedrige Gruppe abbilden, die man erhält, wenn man einerseits die $l$, andererseits die $r$ eigentlich orthogonal transformiert.

Um dies Ergebnis etwas deutlicher aussprechen zu können, wollen wir unsere Linienkoordinaten noch in gewisser Weise normieren. In (3) wollen wir nämlich die Punkte $x$, $y$ so wählen, daß $xx = 1$, $xy = 0$ und $yy = 1$ wird. Aus (6) und (7) folgt dann für $x = \bar{x}$, $y = \bar{y}$

$$A = 2g_{01}g_{23} + \dots = 0,$$
$$B = g_{01}^2 + g_{23}^2 + \dots = 1,$$

und daher aus (8) und (9)

$$(11) \qquad \begin{cases} \mathfrak{l}\mathfrak{l} = l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1, \\ \mathfrak{r}\mathfrak{r} = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = 1. \end{cases}$$

Wir haben also gefunden:

A. *Die normierten Geraden* ($A = 0$, $B = 1$) *des elliptischen Raumes lassen sich so auf die Punkte* $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{r}$ *zweier Euklidischen Kugeln* $\mathfrak{l}\mathfrak{l} = 1$, $\mathfrak{r}\mathfrak{r} = 1$ *abbilden, daß dabei den nicht-Euklidischen Bewegungen des elliptischen Raumes die Euklidischen Drehungen der beiden Bildkugeln entsprechen und umgekehrt.*

Der Abbildung $\bar{\mathfrak{l}} = -\mathfrak{l}$, $\bar{\mathfrak{r}} = -\mathfrak{r}$ oder $\bar{g}_{ik} = -g_{ik}$ entspricht eine unwesentliche Umnormierung der Geraden des elliptischen Raumes (Wechsel

der „Orientierung"). Auf einer normierten („orientierten" oder „gerich teten") Geraden $g$ kann man den Sinus der Entfernung zweier normierte Punkte $z$, $w$ rational erklären. Setzen wir nämlich

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = z,$$

$$x\cos\beta + y\sin\beta = w,$$

so folgt

$$z_i w_k - z_k w_i = \sin(\beta - \alpha)\cdot(x_i y_k - x_k y_i),$$

und somit können wir für die Entfernung $\beta - \alpha = \psi$ von $z$, $w$ setzen

$$\sin\psi = \frac{z_i w_k - z_k w_i}{g_{ik}}. \tag{12}$$

Sind $g$ und $\bar{g}$ zwei verschiedene Geraden des elliptischen Raumes, so gibt es aus Gründen der Stetigkeit und Abgeschlossenheit auf ihnen sicher ein Punktepaar $x$ auf $g$, $\bar{x}$ auf $\bar{g}$ mit stationärer Entfernung, so daß also wenn $y$ und $\bar{y}$ zwei Punkte auf $g$ und $\bar{g}$ sind, die den Bedingungen $xy = 0$, $\bar{x}\bar{y} = 0$ genügen, der Ausdruck

$$\cos\varphi = (x\cos\alpha + y\sin\alpha)(\bar{x}\cos\bar{\alpha} + \bar{y}\sin\bar{\alpha}) \tag{13}$$

verschwindende Ableitungen hat:

$$\frac{\partial\cos\varphi}{\partial\alpha} = 0, \quad \frac{\partial\cos\varphi}{\partial\bar{\alpha}} = 0 \quad \text{für} \quad \alpha = 0,\ \bar{\alpha} = 0. \tag{14}$$

Das gibt

$$x\bar{y} = 0, \quad y\bar{x} = 0. \tag{15}$$

Da die Beziehungen erhalten bleiben, wenn man $x$, $\bar{x}$ mit $y$, $\bar{y}$ vertauscht, so haben auch $y$, $\bar{y}$ stationäre Entfernung. Jetzt wird aus (13)

$$\cos\varphi = x\bar{x}\cos\alpha\cos\bar{\alpha} + y\bar{y}\sin\alpha\sin\bar{\alpha} \tag{16}$$

und

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\cos\varphi}{\partial\alpha} = -x\bar{x}\sin\alpha\cos\bar{\alpha} + y\bar{y}\cos\alpha\sin\bar{\alpha}, \\ \dfrac{\partial\cos\varphi}{\partial\alpha} = -x\bar{x}\cos\alpha\sin\bar{\alpha} + y\bar{y}\sin\alpha\cos\bar{\alpha}. \end{cases} \tag{17}$$

Sollen die beiden Ableitungen verschwinden, so folgt durch Addition und Subtraktion

$$\begin{cases} (x\bar{x} - y\bar{y})\sin(\alpha + \bar{\alpha}) = 0, \\ (x\bar{x} + y\bar{y})\sin(\alpha - \bar{\alpha}) = 0. \end{cases} \tag{18}$$

Ist also

$$x\bar{x} - y\bar{y} \neq 0, \quad x\bar{x} + y\bar{y} \neq 0, \tag{19}$$

o gibt es auf unserem Geradenpaar genau zwei Punktpaare $x, y$; $\bar{x}, \bar{y}$ nit stationärer Entfernung in den Beziehungen

$$\begin{cases} xy = \bar{x}\bar{y} = 0, \\ x\bar{y} = y\bar{x} = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Setzen wir

$$x\bar{x} = \cos\varphi, \qquad \bar{y}\bar{y} = \cos\bar{\varphi}, \tag{21}$$

o wird nach (7) und (9)

$$[x, y]\,[\bar{x}, \bar{y}] = g_{01}\bar{g}_{01} + g_{23}\bar{g}_{23} + \ldots = \frac{\mathfrak{l}\bar{\mathfrak{l}} + \mathfrak{r}\bar{\mathfrak{r}}}{2} = \cos\varphi \cdot \cos\bar{\varphi}. \tag{22}$$

Ferner nach dem Multiplikationssatz für vierreihige Determinanten und vegen (6), (9)

$$(xy\bar{x}\bar{y})^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cos\bar{\varphi} \\ \cos\varphi & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cos\bar{\varphi} & 0 & 1 \end{vmatrix} = \sin^2\varphi \cdot \sin\bar{\varphi} \tag{23}$$

$$= (g_{01}\bar{g}_{23} + g_{23}\bar{g}_{01} + \ldots)^2 = \left(\frac{\mathfrak{l}\bar{\mathfrak{l}} - \mathfrak{r}\bar{\mathfrak{r}}}{2}\right)^2.$$

Also nach willkürlicher Entscheidung über ein Vorzeichen

$$\frac{\mathfrak{l}\bar{\mathfrak{l}} - \mathfrak{r}\bar{\mathfrak{r}}}{2} = -\sin\varphi \cdot \sin\bar{\varphi}. \tag{24}$$

Setzen wir also

$$\mathfrak{l}\bar{\mathfrak{l}} = \cos\alpha_l, \qquad \mathfrak{r}\bar{\mathfrak{r}} = \cos\alpha_r, \tag{25}$$

so folgt aus (22) und (24)

$$\cos\alpha_l = \cos(\varphi + \bar{\varphi}), \qquad \cos\alpha_r = \cos(\varphi - \bar{\varphi}). \tag{26}$$

Wir können daher ansetzen (Hjelmslev, Study)

$$\alpha_l = \varphi + \bar{\varphi}, \qquad \alpha_r = \varphi - \bar{\varphi}. \tag{27}$$

Daraus folgt z. B.:

B. Sich schneidende Geraden. *Wenn zwei Geraden $g$ und $\bar{g}$ sich schneiden ($\bar{\varphi} = 0$), so haben die beiden Paare von Bildpunkten gleiche sphärische Abstände ($\alpha_l = \alpha_r$).*

Wir wollen ferner zwei Geraden $g$ und $\bar{g}$, von denen irgend zwei Punkte in der Beziehung stehen $z\bar{z} = 0$, als „absolute Polaren" bezeichnen.

C. Absolute Polaren. *Für zwei absolute Polaren fallen die linken Bilder zusammen ($\alpha_l = 0$) und die rechten liegen diametral ($\alpha_r = \pi$).* Aus (9) folgt dann $g_{01} = \bar{g}_{23} \cdots$, $g_{23} = \bar{g}_{01} \cdots$

Wir hätten auch $\alpha_l = \pi$ und $\alpha_r = 0$ setzen können, dann wären nur die Richtungen der absoluten Polaren anders aneinander gebunden. Unter

der Annahme (19) sind die beiden „gemeinsamen Normalen $[x, \bar{x}]$ und $[y, \bar{y}]$ unserer Geraden $[x, y]$ und $[\bar{x}, \bar{y}]$ absolute Polaren.

D. Parallelismus von Clifford. *Zwei Gerade, für die* $\mathfrak{l} = \pm \mathfrak{r}$ $[\mathfrak{r} = \pm \bar{\mathfrak{r}}]$ *ist, nennen wir links* [*rechts*] *gleichsinnig oder gegensinnig parallel.*

Es ist dann $x\bar{x} \pm y\bar{y} = 0$ und die Gleichungen (18) haben unendlich viele Lösungen $\alpha \pm \bar{\alpha} = 0$, es gibt also unendlich viele gemeinsame Normale paralleler Geraden.

Aus A. und B. folgt:

E. *Allen Geraden durch einen Punkt entspricht eine kongruente, allen Geraden einer Ebene eine symmetrische Abbildung unserer Bildkugeln*, d. h. eine eigentlich oder uneigentlich orthogonale Substitution

$$r_i = \sum c_{ik} l_k. \tag{28}$$

Z. B. entspricht den Geraden durch $x_0 = 1$, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ mit $g_{23} = g_{31} = g_{12} = 0$ die Abbildung $r_i = l_i$ und den Geraden in der Ebene $x_0 = 0$ mit $g_{01} = g_{02} = g_{03} = 0$ die Abbildung $r_i = -l_i$ wegen (9).

## § 2.

## Studys Abbildung der Geraden des elliptischen Raumes auf die dualen Punkte einer Kugel.

Die in § 1 vorgetragenen Ergebnisse lassen sich zum Teil vorteilhaft anders fassen. Wir führen neben den bisher betrachteten reellen Zahlen eine komplexe Einheit $\varepsilon$ ein, die der Rechenregel

$$\varepsilon^2 = +1 \tag{29}$$

genügt, und fassen die Linienkoordinaten zu „dualen" Verbindungen zusammen, indem wir setzen

$$\begin{cases} g_{01} + \varepsilon g_{23} = G_1, \\ g_{02} + \varepsilon g_{31} = G_2, \\ g_{03} + \varepsilon g_{12} = G_3. \end{cases} \tag{30}$$

Jeder normierten Geraden entspricht dann ein „dualer Einheitsvektor" $\mathfrak{G}(G_1, G_2, G_3)$, denn es ist

$$\mathfrak{G}\mathfrak{G} = G_1^2 + G_2^2 + G_{23}^2 = (g_{01}^2 + g_{23}^2 + \ldots) + \varepsilon(2 g_{01} g_{23} + \ldots) = 1. \tag{31}$$

Unterwerfen wir ferner die $G_i$ der Gruppe der eigentlich orthogonalen Substitutionen, wobei die Koeffizienten duale Zahlen sein sollen, so erhalten wir eine $2 \times 3 = 6$-gliedrige Gruppe, die (31) invariant läßt, also die Bewegungen des elliptischen Raumes.

Für das skalare Produkt zweier Vektoren $\mathfrak{G}\,\overline{\mathfrak{G}}$ erhalten wir

$$\mathfrak{G}\,\overline{\mathfrak{G}} = (g_{01}\,\bar{g}_{01} + g_{23}\,\bar{g}_{23} + \ldots) + \varepsilon\,(g_{01}\,\bar{g}_{23} + g_{23}\,\bar{g}_{01} + \ldots), \tag{32}$$

wofür wir nach (22), (23), (24) schreiben können

$$\mathfrak{G}\,\overline{\mathfrak{G}} = \cos\varphi\cos\bar{\varphi} - \varepsilon\sin\varphi\sin\bar{\varphi}. \tag{33}$$

Führen wir den dualen Winkel $\Phi = \varphi + \varepsilon\bar{\varphi}$ ein, so gibt die Berechnung des Kosinus unter Verwendung des Additionstheorems und der Potenzreihen wegen (29)

$$\cos\Phi = \cos\varphi\cos\bar{\varphi} - \varepsilon\sin\varphi\sin\bar{\varphi}. \tag{34}$$

Wir haben also

$$\mathfrak{G}\,\overline{\mathfrak{G}} = \cos\Phi = \cos(\varphi + \varepsilon\bar{\varphi}). \tag{35}$$

Wir haben somit gefunden:

F. *Der duale Winkel $\Phi = \varphi + \varepsilon\bar{\varphi}$ zweier Vektoren $\mathfrak{G}$, $\overline{\mathfrak{G}}$ setzt sich additiv aus den stationären Abständen der entsprechenden Geraden des elliptischen Raumes zusammen. Insbesondere ist $\mathfrak{G}\,\overline{\mathfrak{G}} = 0$ die Bedingung für senkrechtes Schneiden.*

Sind $\mathfrak{G}$ und $\overline{\mathfrak{G}}$ absolute Polaren, so ist nach C.:

$$\overline{\mathfrak{G}} = \varepsilon\,\mathfrak{G}, \qquad \mathfrak{G} = \varepsilon\,\overline{\mathfrak{G}}. \tag{36}$$

Damit sind die wichtigsten Ergebnisse von Fubini, Hjelmslev und Study, die auf Arbeiten von Cayley und Clifford aufbauen, soweit wir sie im folgenden brauchen, wiedergegeben. Im Hinblick auf die hier beabsichtigten infinitesimal-geometrischen Anwendungen haben wir die auftretenden Vorzeichenschwierigkeiten, derer sich Study besonders liebevoll angenommen hat, hier nur kurz gestreift.

## § 3.

## Ableitungsformeln für die geradlinigen Flächen.

Um zu einer geradlinigen Fläche zu kommen, stellen wir den dualen Einheitsvektor $\mathfrak{G}$ als Funktion eines reellen Parameters $t$ dar: $G_k(t)$. Dann normieren wir den Vektor $\mathfrak{G}'$ mit den Koordinaten $JG_k : dt$ wieder zu einem dualen Einheitsvektor $\mathfrak{H}$ durch Multiplikation mit einem Skalar $P = p + \varepsilon q$, indem wir setzen

$$\mathfrak{G}' = P\,\mathfrak{H}. \tag{37}$$

Dann ergänzen wir die zwei orthogonalen Vektoren $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ durch einen dritten Einheitsvektor $\mathfrak{R}$ zu einem orthogonalen Dreibein. Die Ableitungen lassen sich dann aus den Vektoren selbst linear zusammensetzen

$$\mathfrak{G}' = P_{11}\mathfrak{G} + P_{12}\mathfrak{H} + P_{13}\mathfrak{N},$$
$$\mathfrak{H}' = P_{21}\mathfrak{G} + P_{22}\mathfrak{H} + P_{23}\mathfrak{N},$$
$$\mathfrak{N}' = P_{31}\mathfrak{G} + P_{32}\mathfrak{H} + P_{33}\mathfrak{N}.$$

Aus der Orthogonalität folgt aber die schiefe Symmetrie der Matrix de $P_{ik}$, denn es ist z. B.

$$\mathfrak{G}\mathfrak{H} = 0$$

und daraus

$$\mathfrak{G}'\mathfrak{H} + \mathfrak{G}\mathfrak{H}' = P_{12} + P_{21} = 0.$$

Berücksichtigt man noch (37), so erhält man für die Ableitungsgleichunge die Gestalt

$$\boxed{\mathfrak{G}' = P\mathfrak{H}, \quad \mathfrak{H}' = -P\mathfrak{G} + Q\mathfrak{N}, \quad \mathfrak{N}' = -Q\mathfrak{H}, \qquad P = p + \varepsilon\bar{p}, \quad Q = q + \varepsilon\bar{q}.} \tag{38}$$

Bezeichnen wir jetzt mit $\mathfrak{G} = [x, y]$ gleich den dualen Vektor der aus der Matrix der Punkte $x, y$ durch die Zusammenfassung (30) $G_1 = g_{01} + \varepsilon g_{23}$ entsteht, so können wir zunächst setzen

$$\mathfrak{G} = [x, y], \qquad \mathfrak{H} = [x, z], \qquad \mathfrak{N} = [x, w]. \tag{39}$$

Dazu führen wir nach (36) noch die absoluten Polaren ein

$$\varepsilon\mathfrak{G} = [z, w], \qquad \varepsilon\mathfrak{H} = [w, y], \qquad \varepsilon\mathfrak{N} = [y, z]. \tag{40}$$

Wir behaupten: $\mathfrak{N}$ (und daher auch $\varepsilon\mathfrak{N}$) ist eine gemeinsame Normale benachbarter Erzeugender $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G} + d\mathfrak{G}$ der geradlinigen Fläche $(\mathfrak{G})$. Tatsächlich! Es ist nämlich

$$\mathfrak{G}\mathfrak{N} = 0,$$
$$(\mathfrak{G} + d\mathfrak{G})\mathfrak{N} = \mathfrak{N}\,d\mathfrak{G} = 0$$

wegen (37). Ebenso ist $\mathfrak{G}$ gemeinsame Normale benachbarter Erzeugender von $(\mathfrak{N})$:

$$\mathfrak{N}\mathfrak{G} = 0,$$
$$(\mathfrak{N} + d\mathfrak{N})\mathfrak{G} = 0$$

wegen $(38)_3$.

Nennen wir die Treffpunkte $x, y$ der gemeinsamen Normalen von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G} + d\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{G}$ „*Kehlpunkte*“ von $(\mathfrak{G})$, so sieht man sofort: *$x, y, z, w$ sind die Kehlpunkte der von den Seiten $\mathfrak{G}, \varepsilon\mathfrak{N}, \varepsilon\mathfrak{G}, \mathfrak{N}$ dieses Vierecks beschriebenen geradlinigen Flächen.*

Für das normierte Tetraeder der Punkte $x, y, z, w$ gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} xx &= 1, & xy &= 0, & xz &= 0, & xw &= 0, \\ yy &= 1, & yz &= 0, & yw &= 0, \\ zz &= 1, & zw &= 0, \\ ww &= 1 \end{aligned} \tag{41}$$

und die Determinate $(xyzw)$ können wir $= +1$ nehmen.

Wegen (41) sind dann die Ableitungsgleichungen für dieses „begleitende Tetraeder" jedenfalls wieder schiefsymmetrisch ($x' = dx : dt$, usw.)

$$
\begin{aligned}
x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}w,\\
y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}w,\\
z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}w,\\
w' &= a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}w;\\
a_{ik} &+ a_{ki} = 0.
\end{aligned} \tag{42}
$$

Durch Ableitung folgt aus $(39)_1$ wegen (42), (39) und (40)

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{G}' &= [x', y] + [x, y']\\
&= a_{13}[z, y] + a_{14}[w, y] + a_{23}[x, z] + a_{24}[w, z]\\
&= -\varepsilon a_{24}\mathfrak{G} + (a_{23} + \varepsilon a_{14})\mathfrak{H} - \varepsilon a_{13}\mathfrak{N}.
\end{aligned}
$$

Durch Vergleichen mit $(38)_1$ ergibt sich daraus

$$
\begin{aligned}
a_{24} &= a_{13} = 0,\\
a_{23} &= p, \qquad a_{14} = \bar{p}.
\end{aligned} \tag{43}
$$

Ebenso folgt aus $(39)_3$ unter Beachtung von (43)

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{N}' &= [x', w] + [x, w']\\
&= a_{12}[y, w] + a_{43}[x, z] = (a_{43} - \varepsilon a_{12})\mathfrak{H}
\end{aligned}
$$

und wegen $(38)_3$

$$
a_{34} = q, \qquad a_{12} = \bar{q}. \tag{44}
$$

Tragen wir aus (43), (44) die Werte der $a_{ik}$ in (42) ein, so ergeben sich die endgültigen Ableitungsgleichungen

$$
\boxed{\begin{aligned}
x' &= +\bar{q}y + \bar{p}w, \qquad z' = -py + qw,\\
y' &= -\bar{q}x + pz, \qquad w' = -\bar{p}x - qz.
\end{aligned}} \tag{45}
$$

Hieraus folgt

G. *Durch Angabe der Verhältnisse $p(t) : \bar{p}(t) : q(t) : \bar{q}(t)$ ist die geradlinige Fläche $(\mathfrak{G})$ bis auf Bewegungen eindeutig bestimmt.*

Die Bestimmung beruht auf der Integration des Systems (45) von linearen und homogenen Differentialgleichungen.

Nehmen wir auf der Fläche $(\mathfrak{G})$ eine senkrechte Trajektorie $(p)$ der Erzeugenden; dann ist

$$
p = x\sin\alpha + y\cos\alpha \tag{46}
$$

und daraus durch Ableitung wegen (45)

$$
p' = (\alpha' - \bar{q})\cos\alpha \cdot x - (\alpha' - \bar{q})\sin\alpha \cdot y + p\cos\alpha \cdot z + \bar{p}\sin\alpha \cdot w. \tag{47}
$$

Wegen der gewünschten Orthogonalität muß $p'$ (wegen $pp' = 0$) auf der absoluten Polaren $[z, w]$ von $\mathfrak{G} = [x, y]$ gelegen sein und daher $\alpha' - \bar{q} = 0$ sein. Somit ist

$$\alpha = \int \bar{q}\, dt \tag{48}$$

und wir finden

H. *Die Integralinvariante $\alpha$ von $(\mathfrak{G})$ ist die Entfernung des Kehlpunkts $x$ von einer orthogonalen Trajektorie $(p)$ der Erzeugenden von $(\mathfrak{G})$.*

Die entsprechende einfache Bedeutung haben die Integralinvarianten

$$\int p\, dt, \quad \int q\, dt, \quad \int \bar{p}\, dt \tag{49}$$

auf den geradlinigen Flächen $(\varepsilon\mathfrak{R})$, $(\varepsilon\mathfrak{G})$, $(\mathfrak{R})$.

## § 4.

## Die beiden sphärischen Bilder einer geradlinigen Fläche.

Die Formeln (38) müssen wegen der Definition der Einheit $\varepsilon$ $(\varepsilon^2 = 1)$ richtig bleiben, wenn man für $\varepsilon$ durchweg $+1$ oder durchweg $-1$ setzt. Wenn wir nach (9) für die sphärischen Bilder von $\mathfrak{G}$ etwa die Benennungen $\mathfrak{g}_l$, $\mathfrak{g}_r$ einführen, so finden wir auf diese Art aus (38)

$$(50)\quad \begin{cases} \mathfrak{g}_l' = +(p+\bar{p})\,\mathfrak{h}_l, \\ \mathfrak{h}_l' = -(p+\bar{p})\,\mathfrak{g}_l + (q+\bar{q})\,\mathfrak{n}_l, \\ \mathfrak{n}_l' = -(q+\bar{q})\,\mathfrak{h}_l; \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathfrak{g}_r' = +(p-\bar{p})\,\mathfrak{h}_r, \\ \mathfrak{h}_r' = -(p-\bar{p})\,\mathfrak{g}_r + (q-\bar{q})\,\mathfrak{n}_r, \\ \mathfrak{n}_r' = -(q-\bar{q})\,\mathfrak{h}_r. \end{cases}$$

Die drei Vektoren $\mathfrak{g}_l$, $\mathfrak{h}_l$, $\mathfrak{n}_l$ und ebenso $\mathfrak{g}_r$, $\mathfrak{h}_r$, $\mathfrak{n}_r$ bilden je ein Euklidisches orthogonales Dreibein, und zwar das zu der sphärischen Kurve $(\mathfrak{g}_l)$ und $(\mathfrak{g}_r)$ gehörige begleitende Dreibein. Aus den Frenet-Formeln (50) folgen für Bogenlänge und Integral der geodätischen Krümmung dieser Kurven die Werte

$$(51)\quad \begin{aligned} \int ds_l &= \int (p+\bar{p})\,dt, & \int ds_r &= \int (p-\bar{p})\,dt, \\ \int \frac{ds_l}{\varrho_l} &= \int (q+\bar{q})\,dt, & \int \frac{ds_r}{\varrho_r} &= \int (q-\bar{q})\,dt \end{aligned}$$

und damit sind neue geometrische Deutungen unserer vier Integralinvarianten (48), (49) gefunden.

Wir wollen hiervon eine Anwendung machen, um festzustellen, wie sich ein Strahlensystem, das aus den Normalen einer Fläche im elliptischen Raume besteht, sphärisch abbildet. Nach H. ist für ein solches Strahlensystem kennzeichnend, daß in ihm das Integral (48) vom Wege nicht abhängt oder auf geschlossenen Wegen Null ergibt. Wenden wir andererseits die Formel von Gauß und Bonnet[2]) auf die sphärischen Bilder einer in sich zurücklaufenden geradlinigen Fläche an, so finden wir

[2]) Vgl. etwa des Verfassers Differentialgeometrie, I, Berlin 1921, S. 108 (97).

$$\oint (q + \bar{q})\,dt + \Omega_l = 2\pi, \tag{52}$$
$$\oint (q - \bar{q})\,dt + \Omega_r = 2\pi,$$

wenn z. B. $\Omega_l$ den von der Kurve $(\mathfrak{g}_l)$ umrandeten Teil der Oberfläche der Einheitskugel bedeutet. Aus (52) folgt

$$2\oint \bar{q}\,dt + \Omega_l - \Omega_r = 0. \tag{53}$$

Somit ist

$$\oint \bar{q}\,dt = 0 \tag{54}$$

gleichbedeutend mit

$$\Omega_l = \Omega_r. \tag{55}$$

Darin ist ein Beweis für eine von E. Study angegebene Behauptung[3]) enthalten:

J. *Für ein Normalensystem ist kennzeichnend, daß seine sphärischen Bilder aufeinander eigentlich flächentreu bezogen sind.*

Insbesondere sind die Strahlensysteme, deren sphärische Bilder auf Kurven zusammenschrumpfen ($\Omega_l = \Omega_r = 0$), normal zu Flächen vom Gaußschen Krümmungsmaß Null, die 1895 von L. Bianchi[4]) untersucht worden sind. Die von Bianchi gefundenen merkwürdigen Eigenschaften dieser Flächen lassen sich mit unseren Hilfsmitteln mit Leichtigkeit bestätigen.

## § 5.

## Differentialgeometrie der Raumkurven.

Nehmen wir an, daß eine der vier zu einer geradlinigen Fläche gehörigen Verhältnisgrößen $p : \bar{p} : q : \bar{q}$ etwa $\bar{p}$ identisch $= 0$ sein soll. Dann folgt aus (45)

$$x' = \bar{q}\,y, \tag{56}$$

wenn also $\bar{q}$ nicht ebenfalls $= 0$ ist, was $x =$ konst., also für die Fläche der $[x, y] = \mathfrak{G}$ einen Kegel geben würde, so besteht $(\mathfrak{G})$ aus der Tangentenfläche der Kurve $(x)$. $x, y, z, w$ ist das begleitende Tetraeder dieser Kurve, (45) geht in das System der zuerst von E. Rath angegebenen Ableitungsformeln für die elliptische Geometrie über und die vorgetragene Untersuchung umfaßt die z. B. von E. Salkowski[5]) studierte Differential-

[3]) E. Study: Jahresbericht der D. Math. Ver. 11 (1902), S. 321. G. Fubini[1]), S. 46 und J. L. Coolidge[1]), S. 229.

[4]) Vgl. etwa L. Bianchi: Lezioni di geometria differenziale I (1902), S. 506 u. ff.

[5]) E. Salkowski: Zur Theorie der Kurven im elliptischen Raum. Jahresbericht der D. Math. Ver. 21 (1912), S. 27–52.

geometrie der Kurven im elliptischen Raum. Normiert man einen neuen Parameter $s$ (die Bogenlänge von $(x)$) durch die Forderung

$$\frac{ds}{dt} = \bar{q}, \tag{57}$$

so wird aus (45) das System der Formeln von E. Rath[6])

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= +y, & \frac{dz}{ds} &= -\frac{p}{\bar{q}}y + \frac{q}{\bar{q}}w, \\ \frac{dy}{ds} &= -x + \frac{p}{\bar{q}}z, & \frac{dw}{ds} &= -\frac{q}{\bar{q}}z. \end{aligned} \tag{58}$$

Man wird deshalb die Invarianten

$$\frac{p}{\bar{q}} = \frac{1}{\varrho}, \qquad \frac{q}{\bar{q}} = \frac{1}{\tau} \tag{59}$$

als „Krümmung" und „Windung" der Kurve einführen.

Aus (50) folgt in unserem Falle

$$\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{g}_l}{ds} &= +\frac{1}{\varrho}\mathfrak{h}_l, & \frac{d\mathfrak{g}_r}{ds} &= +\frac{1}{\varrho}\mathfrak{h}_r, \\ \frac{d\mathfrak{h}_l}{ds} &= -\frac{1}{\varrho}\mathfrak{g}_l + \left(\frac{1}{\tau}+1\right)\mathfrak{n}_l, & \frac{d\mathfrak{h}_r}{ds} &= -\frac{1}{\varrho}\mathfrak{g}_r + \left(\frac{1}{\tau}-1\right)\mathfrak{n}_r, \\ \frac{d\mathfrak{n}_l}{ds} &= -\left(\frac{1}{\tau}+1\right)\mathfrak{h}_l; & \frac{d\mathfrak{n}_r}{ds} &= -\left(\frac{1}{\tau}-1\right)\mathfrak{h}_r. \end{aligned} \tag{60}$$

Die beiden sphärischen Kurven $(\mathfrak{g}_l)$ und $(\mathfrak{g}_r)$ sind also jetzt durch gleiche Bogenlängen

$$s_l = s_r = \int \frac{ds}{\varrho} = \int p\,dt \tag{61}$$

aufeinander bezogen und haben die geodätischen Krümmungen

$$\varrho\left(\frac{1}{\tau} \pm 1\right). \tag{62}$$

Es sei zum Schluß erwähnt, daß sich mit den hier vorgetragenen Methoden auch die Differentialgeometrie der Strahlensysteme im elliptischen Raum in sehr übersichtlicher Form behandeln läßt, ähnlich wie ich die entsprechenden Euklidischen Fragen am Schlusse des ersten Bandes meiner Vorlesungen über Differentialgeometrie (Berlin, Springer 1921) behandelt habe.

Hamburg, Mathematisches Seminar im Mai 1922.

---

[6]) E. Rath: Die Grundformeln der allgemeinen Kurven- und Flächentheorie im nicht-Euklidischen Raum. Dissertation Tübingen 1894.

(Eingegangen am 24. Mai 1922.)